УРАВНЕНИЯ

ШАГ ЗА ШАГОМ

учебное пособие для школьников и поступающих в вузы

Автор

Трепачёв Дмитрий

2025 год, v1.0.0

Введение

Всем привет! Меня зовут Трепачёв Дмитрий. Я работаю репетитором по математике, физике и информатике с 2010 года. За это время через мои занятия прошли сотни учеников — от пятиклассников, которые только начинают знакомиться с алгеброй, до выпускников, готовящихся к ЕГЭ и поступлению в вузы.

Эту книгу я сделал для своих занятий. Почему именно уравнения высших степеней? Потому что это естественное продолжение двух предыдущих книг: «Разложение на множители» и «Простые уравнения». В них мы научились работать с линейными, квадратными и простейшими уравнениями, сводящимися к ним. Теперь пришло время подняться на ступеньку выше.

Уравнения третьей, четвёртой и более высоких степеней часто пугают школьников. Кажется, что это что-то сложное и недоступное. На самом деле большинство таких уравнений решается теми же методами, что и квадратные, — нужно лишь научиться правильно их применять. А если методы не работают, всегда можно понизить степень с помощью схемы Горнера или применить специальные формулы (Кардано, Феррари), которые мы тоже разберём.

В школьных учебниках уравнения высших степеней обычно представлены разрозненно: где-то упоминаются биквадратные, где-то — возвратные, где-то — уравнения с целыми корнями. А систематического курса, где все методы собраны в одном месте, часто не хватает. Да и задач на отработку каждого метода обычно мало.

В этой книге я собрал все основные приёмы решения уравнений высших степеней в одном месте:

- разложение на множители (вынесение, группировка, формулы сокращённого умножения);
- уравнения, сводящиеся к квадратным (биквадратные, трёхчленные, возвратные);
- однородные уравнения;
- схема Горнера и теорема о рациональных корнях;
- неполные кубические уравнения;
- комбинированный метод;
- формулы Кардано и Феррари (для углублённого изучения).

Каждому методу посвящена отдельная глава с теорией, подробными примерами и большим количеством задач. В конце есть главы с перемешанными задачами — чтобы научиться определять тип уравнения и выбирать правильный метод решения.

Эта книга пригодится не только моим ученикам, но и всем, кто хочет разобраться в теме самостоятельно. А ещё я буду рад, если другие репетиторы станут использовать её на своих занятиях — берите свободно, пользуйтесь, задавайте побольше примеров своим ученикам.

Больше моих книг вы можете найти на сайте books.mrepetitor.com. Там есть и другие пособия по математике и физике — всё, что я наработал за годы преподавания, а также научно-популярные книги, написанные мною для тех учеников, которые хотят знать больше про историю науки и окружающий мир.

Записаться на мои занятия можно на сайте study.mrepetitor.com. Я преподаю математику и физику для школьников с 5 по 11 классы, готовлю к ЕГЭ, ОГЭ и ЦТ. Если вам или вашему ребёнку нужна помощь — милости прошу!

Удачи в изучении математики!

Дмитрий Трепачёв

Оглавление

Вынесение общего множителя

Теория

В этой главе мы вспомним один из самых простых способов решения уравнений высших степеней — вынесение общего множителя за скобки. Этот способ мы уже использовали для квадратных уравнений, но он отлично работает и для уравнений третьей, четвёртой и более высоких степеней.

Рассмотрим уравнение, в котором каждое слагаемое содержит переменную x в некоторой степени:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x = 0$$

Если все слагаемые содержат x, то его можно вынести за скобки:

$$x(a_n x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1) = 0$$

Правило решения: Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Значит:

$$x = 0 \quad \text{или} \quad a_n x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 = 0$$

Первый корень мы нашли сразу — это $x = 0$. Остаётся решить уравнение степени на единицу меньше.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Кубическое уравнение

Пусть нам нужно решить уравнение:

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

Все слагаемые содержат x. Выносим x за скобки:

$$x(x^2 - 3x + 2) = 0$$

Произведение равно нулю, значит:

$$x = 0 \quad \text{или} \quad x^2 - 3x + 2 = 0$$

Решаем квадратное уравнение:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$x_1 = \frac{3-1}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

Таким образом, исходное уравнение имеет три корня:

$$x = 0, \quad x = 1, \quad x = 2$$

Пример 2

Уравнение четвёртой степени

Рассмотрим уравнение:

$$2x^4 - 5x^3 + 3x^2 = 0$$

Заметим, что все слагаемые содержат x^2. Выносим x^2 за скобки:

$$x^2(2x^2 - 5x + 3) = 0$$

Произведение равно нулю, значит:

$$x^2 = 0 \quad \text{или} \quad 2x^2 - 5x + 3 = 0$$

Из первого: $x = 0$ (но это корень кратности 2, то есть фактически два одинаковых корня).

Решаем второе уравнение:

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$
$$D = 25 - 24 = 1$$
$$x_1 = \frac{5-1}{4} = 1, \quad x_2 = \frac{5+1}{4} = \frac{6}{4} = 1.5$$

Итак, корни: $x = 0$ (дважды), $x = 1$, $x = 1.5$. Обычно записывают так:

$$x = 0, \quad x = 1, \quad x = 1.5$$

Пример 3

Уравнение пятой степени

Возьмём уравнение:

$$x^5 - 2x^4 + x^3 = 0$$

Выносим x^3:

$$x^3(x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ (кратности 3)}$$
$$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \text{ (кратности 2)}$$

Корни: $x = 0$ и $x = 1$.

Пример 4

Когда не у всех слагаемых есть x

Иногда общий множитель есть не у всех слагаемых, а только у части. Например:

$$x^3 - 4x^2 + x - 4 = 0$$

Здесь нельзя вынести x из всех слагаемых (последнее -4 не содержит x). Значит, этот метод не подходит — нужно использовать другие приёмы (группировку, например). Мы вернёмся к этому уравнению в следующей главе.

Пример 5

Когда общий множитель — степень x с коэффициентом

Рассмотрим уравнение:

$$3x^4 - 6x^3 + 9x^2 = 0$$

Здесь можно вынести не только x^2, но и число 3:

$$3x^2(x^2 - 2x + 3) = 0$$

$$3x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$
$$x^2 - 2x + 3 = 0$$
$$D = 4 - 12 = -8 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{нет корней}$$

Единственный корень: $x = 0$.

Пример 6

Когда после вынесения получается биквадратное уравнение

Решим уравнение:

$$x^5 - 5x^3 + 4x = 0$$

Выносим x:

$$x(x^4 - 5x^2 + 4) = 0$$

$$x = 0$$

$$x^4-5x^2+4=0$$

Это биквадратное уравнение. Делаем замену $t=x^2$:

$$t^2-5t+4=0$$

$$t_1=1,\quad t_2=4$$

Возвращаемся к x:

$$x^2=1 \quad\Rightarrow\quad x=\pm1$$
$$x^2=4 \quad\Rightarrow\quad x=\pm2$$

Итого, учитывая $x=0$, получаем пять корней:

$$x=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$$

Задачи

1. Решите уравнения вынесением общего множителя:

1) $x^3-2x^2+x=0$
2) $x^3+3x^2+2x=0$
3) $2x^3-4x^2+2x=0$
4) $x^4-4x^3+3x^2=0$
5) $x^5-5x^4+6x^3=0$
6) $3x^4-6x^3+3x^2=0$
7) $x^3-9x=0$
8) $x^3+4x=0$
9) $x^5-16x^3=0$
10) $2x^4-8x^2=0$
11) $x^4+x^3-6x^2=0$
12) $x^5-2x^4-3x^3=0$

2. Найдите корни уравнений (обратите внимание на кратность):

1) $x^3-2x^2+x=0$
2) $x^4-4x^3+4x^2=0$
3) $x^5+2x^4+x^3=0$
4) $2x^4-8x^3+8x^2=0$
5) $3x^5-6x^4+3x^3=0$
6) $x^6-4x^5+4x^4=0$
7) $x^3+2x^2+x=0$
8) $x^4+6x^3+9x^2=0$
9) $x^5-6x^4+9x^3=0$
10) $4x^4-12x^3+9x^2=0$
11) $9x^5-12x^4+4x^3=0$
12) $x^7-8x^6+16x^5=0$

3. Решите уравнения, предварительно вынеся общий множитель:

1) $x^4-5x^2+4x=0$
2) $x^5-2x^3+x=0$
3) $2x^4-3x^3-2x^2=0$
4) $x^5-5x^3+4x=0$
5) $x^6-7x^4+12x^2=0$
6) $x^7-3x^5+2x^3=0$
7) $x^4+x^3-2x^2=0$
8) $x^5-x^4-6x^3=0$
9) $x^6-2x^5-3x^4=0$
10) $2x^5-4x^4-6x^3=0$
11) $3x^6-9x^5+6x^4=0$
12) $4x^7-8x^6-12x^5=0$

4. Среди предложенных уравнений найдите те, которые решаются вынесением общего множителя, и решите их:

1) $x^3-3x^2+2x=0$
2) $x^3-3x^2+2x-1=0$
3) $x^4-5x^3+6x^2=0$
4) $x^4-5x^3+6x^2+1=0$
5) $2x^5-8x^3=0$
6) $2x^5-8x^3+1=0$
7) $x^4+x^3-2x^2=0$
8) $x^4+x^3-2x^2-2=0$
9) $3x^6-12x^4+9x^2=0$
10) $3x^6-12x^4+9x^2-3=0$
11) $x^7-4x^5+3x^3=0$
12) $x^7-4x^5+3x^3-1=0$

5. Решите уравнения повышенной сложности:

1) $x^5-5x^4+4x^3=0$
2) $x^6-7x^5+10x^4=0$
3) $x^7-9x^6+18x^5=0$
4) $2x^4-3x^3-2x^2=0$
5) $3x^5-4x^4-4x^3=0$
6) $4x^6-5x^5-6x^4=0$

7) $x^5 - 2x^4 - 8x^3 = 0$

8) $x^6 - 3x^5 - 10x^4 = 0$

9) $x^7 - 4x^6 - 12x^5 = 0$

10) $x^4 - 5x^3 + 6x^2 = 0$

11) $x^5 - 6x^4 + 8x^3 = 0$

12) $x^6 - 7x^5 + 12x^4 = 0$

Группировка

Теория

В этой главе мы рассмотрим ещё один способ разложения на множители — метод группировки. Он особенно полезен, когда общий множитель есть не у всех слагаемых сразу, но можно объединить слагаемые в группы так, чтобы в каждой группе появился общий множитель.

Основная идея:

1. Разбиваем многочлен на группы (обычно по два-три слагаемых).
2. В каждой группе выносим общий множитель за скобки.
3. Если повезло, после этого у всех групп появляется одинаковая скобка.
4. Выносим эту общую скобку за скобки.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Группировка по два слагаемых

Пусть нам нужно решить уравнение:

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = 0$$

Сгруппируем первые два и последние два слагаемых:

$$(x^3 + 2x^2) + (3x + 6) = 0$$

В первой группе выносим x^2, во второй — 3:

$$x^2(x + 2) + 3(x + 2) = 0$$

Появилась общая скобка $(x + 2)$. Выносим её:

$$(x + 2)(x^2 + 3) = 0$$

Произведение равно нулю, значит:

$$x + 2 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 + 3 = 0$$

Из первого: $x = -2$. Из второго: $x^2 = -3$ — решений нет.
Ответ: $x = -2$.

Пример 2

Другой способ группировки

То же уравнение можно сгруппировать иначе:

$$x^3 + 3x + 2x^2 + 6 = 0$$

$$(x^3 + 3x) + (2x^2 + 6) = 0$$

$$x(x^2 + 3) + 2(x^2 + 3) = 0$$

$$(x^2 + 3)(x + 2) = 0$$

Получили тот же результат. Способ группировки не единственный — главное, чтобы после вынесения появилась общая скобка.

Пример 3

Группировка с минусами

Рассмотрим уравнение:

$$x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = 0$$

Сгруппируем:

$$(x^3 - 2x^2) + (-3x + 6) = 0$$

В первой группе выносим x^2, во второй выносим -3:

$$x^2(x - 2) - 3(x - 2) = 0$$

Общая скобка $(x - 2)$:

$$(x - 2)(x^2 - 3) = 0$$

$$x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$
$$x^2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{3}$$

Ответ: $x = 2$, $x = \pm\sqrt{3}$.

Пример 4

Группировка по три слагаемых

Иногда группы могут быть больше. Например:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$$

Здесь можно сгруппировать первые три слагаемых:

$$(x^3 + 3x^2 + 3x) + 1 = 0$$

$$x(x^2 + 3x + 3) + 1 = 0$$

Но это ничего не даёт — общая скобка не появилась. Зато если заметить, что это формула куба суммы:

$$(x + 1)^3 = 0$$

$$x = -1$$

Значит, группировка не всегда помогает — иногда нужно узнавать формулы сокращённого умножения.

Пример 5

Когда группировка не получается с первого раза

Рассмотрим уравнение:

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$$

Пробуем сгруппировать по два:

$$(x^3 + 3x^2) + (-4x - 12) = 0$$
$$x^2(x + 3) - 4(x + 3) = 0$$
$$(x + 3)(x^2 - 4) = 0$$

Отлично, получилось! Дальше:

$$x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -3$$
$$x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$$

Ответ: $x = -3$, $x = \pm 2$.

Пример 6

Группировка для уравнения четвёртой степени

Решим уравнение:

$$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$$

Сгруппируем:

$$(x^4 + 2x^3 + x^2) + (x^2 + 2x + 1) = 0$$

В первой группе выносим x^2, вторая группа — это квадрат суммы:

$$x^2(x^2 + 2x + 1) + (x + 1)^2 = 0$$

$$x^2(x+1)^2 + (x+1)^2 = 0$$
$$(x+1)^2(x^2+1) = 0$$

$$(x+1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$$
$$x^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{нет решений}$$

Ответ: $x = -1$ (кратности 2).

Пример 7

Когда групп больше двух

Возьмём уравнение пятой степени:

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

Сгруппируем по три:

$$(x^5 + x^4 + x^3) + (x^2 + x + 1) = 0$$
$$x^3(x^2 + x + 1) + 1 \cdot (x^2 + x + 1) = 0$$
$$(x^2 + x + 1)(x^3 + 1) = 0$$

Теперь решаем:

$$x^2 + x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 1 - 4 = -3 \quad \Rightarrow \quad \text{нет корней}$$
$$x^3 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 = -1 \quad \Rightarrow \quad x = -1$$

Ответ: $x = -1$.

Пример 8

Искусственный приём — добавить и вычесть

Иногда группировка требует предварительного преобразования. Например:

$$x^4 + 4 = 0$$

Казалось бы, ничего не группируется. Но если добавить и вычесть $4x^2$:

$$x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = 0$$
$$(x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = 0$$
$$(x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x) = 0$$

Дальше можно решать квадратные уравнения, но это уже сложнее. Такие приёмы мы рассмотрим позже.

Задачи

1. Решите уравнения методом группировки:

1) $x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = 0$

2) $x^3 + 3x^2 + 4x + 12 = 0$

3) $x^3 + 4x^2 + 5x + 20 = 0$

4) $x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = 0$

5) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

6) $x^3 - 4x^2 - 5x + 20 = 0$

7) $2x^3 + 4x^2 + 3x + 6 = 0$

8) $3x^3 + 6x^2 + 2x + 4 = 0$

9) $4x^3 + 8x^2 + 3x + 6 = 0$

10) $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$

11) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$

12) $x^3 + 3x^2 - 16x - 48 = 0$

2. Решите уравнения:

1) $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$

2) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$

3) $x^3 - 3x^2 - 16x + 48 = 0$

4) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$

5) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$

6) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 3 = 0$

7) $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$

8) $x^5+2x^4+2x^3+2x^2+x=0$

9) $x^5+3x^4+3x^3+3x^2+2x=0$

10) $x^4-2x^3+2x^2-2x+1=0$

11) $x^4-3x^3+3x^2-3x+2=0$

12) $x^4-4x^3+4x^2-4x+3=0$

3. Найдите корни уравнений (обратите внимание на знаки):

1) $x^3+5x^2-4x-20=0$

2) $x^3+6x^2-9x-54=0$

3) $x^3+7x^2-16x-112=0$

4) $x^3-5x^2-4x+20=0$

5) $x^3-6x^2-9x+54=0$

6) $x^3-7x^2-16x+112=0$

7) $2x^3+5x^2-2x-5=0$

8) $3x^3+7x^2-3x-7=0$

9) $4x^3+9x^2-4x-9=0$

10) $2x^3-5x^2-2x+5=0$

11) $3x^3-7x^2-3x+7=0$

12) $4x^3-9x^2-4x+9=0$

4. Решите уравнения с дополнительным преобразованием:

1) $x^3+3x^2-4x-12=0$

2) $x^3+4x^2-9x-36=0$

3) $x^3+5x^2-16x-80=0$

4) $x^3-3x^2-4x+12=0$

5) $x^3-4x^2-9x+36=0$

6) $x^3-5x^2-16x+80=0$

7) $x^4+x^3-4x^2-4x=0$

8) $x^4+2x^3-9x^2-18x=0$

9) $x^4+3x^3-16x^2-48x=0$

10) $x^4-x^3-4x^2+4x=0$

11) $x^4-2x^3-9x^2+18x=0$

12) $x^4-3x^3-16x^2+48x=0$

5. Среди предложенных уравнений найдите те, которые решаются группировкой, и решите их:

1) $x^3+2x^2+3x+6=0$

2) $x^3+2x^2+3x+7=0$

3) $x^3-3x^2-4x+12=0$

4) $x^3-3x^2-4x+13=0$

5) $2x^3+4x^2+3x+6=0$

6) $2x^3+4x^2+3x+5=0$

7) $x^4+2x^3+2x^2+2x+1=0$

8) $x^4+2x^3+2x^2+2x+2=0$

9) $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$

10) $x^5+x^4+x^3+x^2+x+2=0$

11) $x^3+2x^2-4x-8=0$

12) $x^3+2x^2-4x-7=0$

Использование формул сокращённого умножения

Теория

В этой главе мы вспомним формулы сокращённого умножения и научимся применять их для решения уравнений высших степеней. Эти формулы позволяют разложить многочлен на множители, а значит — свести уравнение к произведению, равному нулю.

Основные формулы:

- Разность квадратов: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- Сумма кубов: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- Разность кубов: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- Для более высоких степеней:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$$

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}) \quad \text{(для нечётных } n\text{)}$$

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Разность квадратов для чётных степеней

Пусть нам нужно решить уравнение:

$$x^4 - 16 = 0$$

Представим как разность квадратов:

$$(x^2)^2 - 4^2 = 0$$

$$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$$

Произведение равно нулю, значит:

$$x^2 - 4 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 + 4 = 0$$

Из первого: $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$ Из второго: $x^2 = -4$ — решений нет.
Ответ: $x = \pm 2$.

Пример 2

Разность квадратов для шестой степени

Решим уравнение:

$$x^6 - 1 = 0$$

Можно представить как $(x^3)^2 - 1^2$ или как $(x^2)^3 - 1^3$. Выберем первый способ:

$$(x^3 - 1)(x^3 + 1) = 0$$

Теперь каждый множитель раскладываем дальше:

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

Получили:

$$(x-1)(x^2 + x + 1)(x+1)(x^2 - x + 1) = 0$$

Квадратные трёхчлены не имеют корней (дискриминант отрицательный), поэтому:

$$x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

$$x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$$

Ответ: $x = \pm 1$.

Пример 3

Сумма кубов

Рассмотрим уравнение:

$$x^3 + 8 = 0$$

Представляем как сумму кубов:

$$x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 - 2x + 4) = 0$$

$$x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2$$

$$x^2 - 2x + 4 = 0, \quad D = 4 - 16 = -12 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{нет корней}$$

Ответ: $x = -2$.

Пример 4

Разность кубов

Решим уравнение:

$$27x^3 - 1 = 0$$

$$(3x)^3 - 1^3 = (3x - 1)(9x^2 + 3x + 1) = 0$$

$$3x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}$$

$$9x^2 + 3x + 1 = 0, \quad D = 9 - 36 = -27 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{нет корней}$$

Ответ: $x = \frac{1}{3}$.

Пример 5

Сумма пятых степеней

Для нечётных степеней работает формула суммы:

$$x^5 + 32 = 0$$

$$x^5 + 2^5 = (x + 2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16) = 0$$

Первый множитель даёт $x = -2$. Второй множитель — уравнение четвёртой степени, которое может иметь или не иметь корни. В данном случае корней нет (можно проверить подбором или заметить, что все члены положительны при $x \neq -2$).

Ответ: $x = -2$.

Пример 6

Разность пятых степеней

$$x^5 - 1 = 0$$

$$(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$$

Первый множитель: $x = 1$. Второй множитель — возвратное уравнение, которое решается делением на x^2 (мы рассмотрим это позже). Пока можно заметить, что оно не имеет рациональных корней.

Ответ: $x = 1$ (в действительных числах; в комплексных есть ещё четыре корня).

Пример 7

Комбинация с вынесением общего множителя

Решим уравнение:

$$x^5 - 4x^3 = 0$$

Сначала вынесем x^3:

$$x^3(x^2 - 4) = 0$$

Теперь раскладываем разность квадратов:

$$x^3(x - 2)(x + 2) = 0$$

$$x^3 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (кратности 3)}$$
$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$
$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

Ответ: $x = -2, 0, 2$.

Пример 8

Разность четвёртых степеней

$$x^4 - 81 = 0$$
$$(x^2 - 9)(x^2 + 9) = 0$$
$$(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9) = 0$$

$$x = \pm 3, \quad x^2 + 9 = 0 \text{ — нет решений}$$

Пример 9

Когда формула неочевидна

$$8x^6 - 64 = 0$$

Выносим общий множитель 8:

$$8(x^6 - 8) = 0$$
$$x^6 - 8 = 0$$

Представляем как $(x^2)^3 - 2^3$:

$$(x^2 - 2)(x^4 + 2x^2 + 4) = 0$$

Из первого: $x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$ Второй множитель корней не имеет (дискриминант относительно x^2 отрицательный).

Пример 10

Обобщение на n-ю степень

Решим уравнение в общем виде:

$$x^n - a^n = 0$$
$$(x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + a^{n-1}) = 0$$

Корень $x = a$ всегда есть. Остальные корни даёт второй множитель.

Задачи

1. Решите уравнения, используя разность квадратов:

1) $x^4 - 1 = 0$ **3)** $x^4 - 81 = 0$ **5)** $x^6 - 1 = 0$ **7)** $x^6 - 729 = 0$

2) $x^4 - 16 = 0$ **4)** $x^4 - 256 = 0$ **6)** $x^6 - 64 = 0$ **8)** $x^8 - 1 = 0$

9) $x^8 - 256 = 0$ **10)** $x^4 - 9 = 0$ **11)** $x^4 - 25 = 0$ **12)** $x^4 - 49 = 0$

2. Решите уравнения, используя сумму и разность кубов:

1) $x^3 + 1 = 0$ **4)** $x^3 - 8 = 0$ **7)** $x^3 + 64 = 0$ **10)** $27x^3 - 1 = 0$

2) $x^3 - 1 = 0$ **5)** $x^3 + 27 = 0$ **8)** $x^3 - 64 = 0$ **11)** $125x^3 + 8 = 0$

3) $x^3 + 8 = 0$ **6)** $x^3 - 27 = 0$ **9)** $8x^3 + 1 = 0$ **12)** $216x^3 - 125 = 0$

3. Решите уравнения высших степеней:

1) $x^5 + 1 = 0$ **5)** $x^7 + 1 = 0$ **9)** $x^9 + 1 = 0$

2) $x^5 - 1 = 0$ **6)** $x^7 - 1 = 0$ **10)** $x^9 - 1 = 0$

3) $x^5 + 32 = 0$ **7)** $x^7 + 128 = 0$ **11)** $x^9 + 512 = 0$

4) $x^5 - 32 = 0$ **8)** $x^7 - 128 = 0$ **12)** $x^9 - 512 = 0$

4. Решите уравнения, комбинируя вынесение и формулы:

1) $x^5 - 4x^3 = 0$ **5)** $3x^8 - 12x^6 = 0$ **9)** $x^9 + 16x^7 = 0$

2) $x^7 - 9x^5 = 0$ **6)** $4x^{10} - 36x^8 = 0$ **10)** $2x^4 - 32 = 0$

3) $x^9 - 16x^7 = 0$ **7)** $x^5 + 4x^3 = 0$ **11)** $3x^6 - 243 = 0$

4) $2x^6 - 2x^4 = 0$ **8)** $x^7 + 9x^5 = 0$ **12)** $5x^8 - 405 = 0$

5. Найдите все действительные корни уравнений:

1) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ (подсказка: сначала замена $t = x^2$)

2) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

3) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

4) $x^6 - 7x^3 + 6 = 0$ (замена $t = x^3$)

5) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

6) $x^6 - 12x^3 + 27 = 0$

7) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$

8) $x^8 - 20x^4 + 64 = 0$

9) $x^8 - 13x^4 + 36 = 0$

10) $x^{10} - 33x^5 + 32 = 0$

11) $x^{10} - 31x^5 + 30 = 0$

12) $x^{12} - 13x^6 + 36 = 0$

6. Решите уравнения повышенной сложности:

1) $(x^2 + 1)^2 - 4x^2 = 0$ **5)** $x^4 + 6x^2 + 9 - 16x^2 = 0$ **9)** $x^6 + 6x^3 + 9 - 16x^3 = 0$

2) $(x^2 + 4)^2 - 16x^2 = 0$ **6)** $x^4 + 8x^2 + 16 - 25x^2 = 0$ **10)** $x^8 - 2x^4 + 1 - 4x^4 = 0$

3) $(x^2 + 9)^2 - 36x^2 = 0$ **7)** $x^6 + 2x^3 + 1 - 4x^3 = 0$ **11)** $x^8 - 4x^4 + 4 - 9x^4 = 0$

4) $x^4 + 4x^2 + 4 - 9x^2 = 0$ **8)** $x^6 + 4x^3 + 4 - 9x^3 = 0$ **12)** $x^8 - 6x^4 + 9 - 16x^4 = 0$

Биквадратные уравнения

Теория

В этой главе мы рассмотрим уравнения четвёртой степени, которые сводятся к квадратным с помощью замены переменной. Такие уравнения называются биквадратными.

Определение: Биквадратным называется уравнение вида

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

где $a \neq 0$, а x встречается только в чётных степенях: x^4 и x^2.

Метод решения: Биквадратные уравнения решаются с помощью замены:

$$t = x^2$$

Тогда $x^4 = (x^2)^2 = t^2$, и уравнение превращается в квадратное относительно t:

$$at^2 + bt + c = 0$$

Важное замечание: Поскольку $t = x^2$, то t не может быть отрицательным. При решении квадратного уравнения мы получаем значения t, и дальше:

- Если $t > 0$, то $x = \pm\sqrt{t}$ (два корня).
- Если $t = 0$, то $x = 0$ (один корень).
- Если $t < 0$, то корней нет (квадрат числа не может быть отрицательным).

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Простейшее биквадратное уравнение

Пусть нам нужно решить уравнение:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

Делаем замену $t = x^2$:

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

Решаем квадратное уравнение:

$$D = 25 - 16 = 9$$
$$t_1 = \frac{5-3}{2} = 1, \quad t_2 = \frac{5+3}{2} = 4$$

Оба корня положительные. Возвращаемся к x:

$$t_1 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$t_2 = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Ответ: $x = -2, -1, 1, 2$.

Пример 2

Когда один из t отрицательный

Решим уравнение:

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

Замена $t = x^2$:

$$t^2 - 3t - 4 = 0$$

$$D = 9 + 16 = 25$$
$$t_1 = \frac{3-5}{2} = -1, \quad t_2 = \frac{3+5}{2} = 4$$

$t_1 = -1$ — отрицательное, значит, корней не даёт. $t_2 = 4$ — положительное: $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$.

Ответ: $x = -2, 2$.

Пример 3

Когда $t = 0$

Рассмотрим уравнение:

$$x^4 - 9x^2 = 0$$

Замена $t = x^2$:

$$t^2 - 9t = 0$$

$$t(t-9) = 0$$

$$t_1 = 0, \quad t_2 = 9$$

$t_1 = 0$: $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ $t_2 = 9$: $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

Ответ: $x = -3, 0, 3$.

Пример 4

Когда дискриминант равен нулю

Решим уравнение:

$$x^4 - 6x^2 + 9 = 0$$

Замена $t = x^2$:

$$t^2 - 6t + 9 = 0$$

$$(t-3)^2 = 0$$

$$t = 3$$

$t = 3$ — положительное: $x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$.

Ответ: $x = -\sqrt{3}, \sqrt{3}$.

Пример 5

Когда первый коэффициент не равен 1

Рассмотрим уравнение:

$$2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$$

Замена $t = x^2$:

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$D = 25 - 16 = 9$$

$$t_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad t_2 = \frac{5+3}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

Оба корня положительные:

$$t_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$t_2 = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Ответ: $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\sqrt{2}$.

Пример 6

Когда все t отрицательные

Решим уравнение:

$$x^4 + 5x^2 + 6 = 0$$

Замена $t = x^2$:

$$t^2 + 5t + 6 = 0$$

$$D = 25 - 24 = 1$$

$$t_1 = \frac{-5-1}{2} = -3, \quad t_2 = \frac{-5+1}{2} = -2$$

Оба корня отрицательные. Значит, исходное уравнение не имеет решений.
Ответ: корней нет.

Пример 7

Уравнение с нулевым коэффициентом b

Рассмотрим уравнение:

$$x^4 - 16 = 0$$

Можно решить как биквадратное (здесь $b = 0$). Замена $t = x^2$:

$$t^2 - 16 = 0$$

$$t^2 = 16$$

$$t = \pm 4$$

$t = -4$ отбрасываем, $t = 4$ даёт $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$.
Ответ: $x = -2, 2$.

Пример 8

Когда после замены получается иррациональный t

Решим уравнение:

$$x^4 - 4x^2 + 2 = 0$$

Замена $t = x^2$:

$$t^2 - 4t + 2 = 0$$

$$D = 16 - 8 = 8$$

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

Оба корня положительные? Проверим: $2 - \sqrt{2} \approx 2 - 1.41 = 0.59 > 0$. Значит, оба подходят.
Возвращаемся к x:

$$x^2 = 2 + \sqrt{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$x^2 = 2 - \sqrt{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Ответ: $x = \pm\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}$ (четыре корня).

Пример 9

Сложный случай с параметром

Решим уравнение относительно x:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Делаем замену $t = x^2$:

$$at^2 + bt + c = 0$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Дальше нужно рассмотреть знаки полученных t и для каждого положительного t записать $x = \pm\sqrt{t}$.

Задачи

1. Решите биквадратные уравнения:

1) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$	**4)** $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$	**7)** $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$	**10)** $x^4 - 3x^2 - 10 = 0$
2) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$	**5)** $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$	**8)** $x^4 + 17x^2 + 16 = 0$	**11)** $x^4 - 4x^2 - 12 = 0$
3) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$	**6)** $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$	**9)** $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$	**12)** $x^4 - 5x^2 - 14 = 0$

2. Решите биквадратные уравнения с дробными коэффициентами:

1) $2x^4 - 3x^2 + 1 = 0$ **4)** $2x^4 + 3x^2 + 1 = 0$ **7)** $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$ **10)** $2x^4 + 5x^2 + 2 = 0$

2) $3x^4 - 4x^2 + 1 = 0$ **5)** $3x^4 + 4x^2 + 1 = 0$ **8)** $3x^4 - 7x^2 + 2 = 0$ **11)** $3x^4 + 7x^2 + 2 = 0$

3) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$ **6)** $4x^4 + 5x^2 + 1 = 0$ **9)** $4x^4 - 9x^2 + 2 = 0$ **12)** $4x^4 + 9x^2 + 2 = 0$

3. Найдите все действительные корни уравнений:

1) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$ **5)** $x^4 + 7x^2 + 12 = 0$ **9)** $x^4 - 12x^2 + 27 = 0$

2) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ **6)** $x^4 + 8x^2 + 15 = 0$ **10)** $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$

3) $x^4 - 8x^2 + 15 = 0$ **7)** $x^4 - 9x^2 + 18 = 0$ **11)** $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$

4) $x^4 + 6x^2 + 8 = 0$ **8)** $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$ **12)** $x^4 - 6x^2 - 7 = 0$

4. Решите уравнения, предварительно сделав замену:

1) $(x^2 - 2x)^2 - 5(x^2 - 2x) + 6 = 0$ **5)** $(x^2 - 3x)^2 - 2(x^2 - 3x) - 8 = 0$ **9)** $(x^2 - x)^2 - 3(x^2 - x) - 4 = 0$

2) $(x^2 + 3x)^2 - 8(x^2 + 3x) + 12 = 0$ **6)** $(x^2 + 2x)^2 - 4(x^2 + 2x) - 5 = 0$ **10)** $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) - 24 = 0$

3) $(x^2 - 4x)^2 - 3(x^2 - 4x) - 10 = 0$ **7)** $(x^2 - 5x)^2 + 2(x^2 - 5x) - 15 = 0$ **11)** $(x^2 - 6x)^2 + 5(x^2 - 6x) + 6 = 0$

4) $(x^2 + x)^2 - 7(x^2 + x) + 12 = 0$ **8)** $(x^2 + 4x)^2 - (x^2 + 4x) - 12 = 0$ **12)** $(x^2 + 6x)^2 - (x^2 + 6x) - 30 = 0$

5. Решите уравнения с иррациональными ответами:

1) $x^4 - 4x^2 + 2 = 0$ **5)** $x^4 - 8x^2 + 4 = 0$ **9)** $x^4 - 12x^2 + 6 = 0$

2) $x^4 - 4x^2 - 1 = 0$ **6)** $x^4 - 8x^2 - 3 = 0$ **10)** $x^4 - 12x^2 - 5 = 0$

3) $x^4 - 6x^2 + 3 = 0$ **7)** $x^4 - 10x^2 + 5 = 0$ **11)** $x^4 - 14x^2 + 7 = 0$

4) $x^4 - 6x^2 - 2 = 0$ **8)** $x^4 - 10x^2 - 4 = 0$ **12)** $x^4 - 14x^2 - 6 = 0$

6. Определите, при каких значениях параметра a уравнение имеет решения:

1) $x^4 + ax^2 + 1 = 0$ **5)** $x^4 + ax^2 + 4 = 0$ **9)** $2x^4 + ax^2 + 1 = 0$

2) $x^4 + ax^2 - 1 = 0$ **6)** $x^4 + ax^2 - 4 = 0$ **10)** $2x^4 + ax^2 - 1 = 0$

3) $x^4 - ax^2 + 1 = 0$ **7)** $x^4 - ax^2 + 4 = 0$ **11)** $3x^4 - ax^2 + 2 = 0$

4) $x^4 - ax^2 - 1 = 0$ **8)** $x^4 - ax^2 - 4 = 0$ **12)** $3x^4 - ax^2 - 2 = 0$

Трёхчленные уравнения высших степеней

Теория

В этой главе мы обобщим метод, который использовали для биквадратных уравнений, на уравнения более высоких степеней. Трёхчленными называются уравнения вида

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

где $a \neq 0$, а n — натуральное число.

Примеры таких уравнений:

- $ax^4 + bx^2 + c = 0$ — биквадратное (при $n = 2$)
- $ax^6 + bx^3 + c = 0$ (трёхчленное шестой степени)
- $ax^8 + bx^4 + c = 0$ (трёхчленное восьмой степени)
- $ax^{10} + bx^5 + c = 0$ (трёхчленное десятой степени)

Метод решения: Такие уравнения решаются с помощью замены:

$$t = x^n$$

Тогда $x^{2n} = (x^n)^2 = t^2$, и уравнение превращается в квадратное относительно t:

$$at^2 + bt + c = 0$$

Возврат к переменной x: После того как мы нашли корни t_1 и t_2, нужно решить уравнения:

$$x^n = t_1 \quad \text{и} \quad x^n = t_2$$

Здесь важно помнить правила извлечения корней:

- Если n нечётное, то уравнение $x^n = t$ имеет один корень $x = \sqrt[n]{t}$ для любого t.
- Если n чётное, то:
  - при $t > 0$: $x = \pm\sqrt[n]{t}$ (два корня);
  - при $t = 0$: $x = 0$ (один корень);
  - при $t < 0$: решений нет.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Уравнение шестой степени ($n = 3$)

Пусть нам нужно решить уравнение:

$$x^6 - 7x^3 + 6 = 0$$

Здесь $x^6 = (x^3)^2$, поэтому делаем замену $t = x^3$:

$$t^2 - 7t + 6 = 0$$

$$D = 49 - 24 = 25$$

$$t_1 = \frac{7-5}{2} = 1, \quad t_2 = \frac{7+5}{2} = 6$$

Возвращаемся к x. Показатель $n = 3$ нечётный, поэтому каждое уравнение даёт один корень:

$$x^3 = 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1} = 1$$

$$x^3 = 6 \Rightarrow x = \sqrt[3]{6}$$

Ответ: $x = 1$ и $x = \sqrt[3]{6}$.

Пример 2

Уравнение восьмой степени ($n = 4$)

Решим уравнение:

$$x^8 - 17x^4 + 16 = 0$$

Замена $t = x^4$:

$$t^2 - 17t + 16 = 0$$

$$D = 289 - 64 = 225$$

$$t_1 = \frac{17 - 15}{2} = 1, \quad t_2 = \frac{17 + 15}{2} = 16$$

Показатель $n = 4$ чётный. Возвращаемся к x:

$$x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{1} = \pm 1$$

$$x^4 = 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2$$

Ответ: $x = -2, -1, 1, 2$.

Пример 3

Когда один из t отрицательный (чётная степень)

Рассмотрим уравнение:

$$x^8 - 3x^4 - 4 = 0$$

Замена $t = x^4$:

$$t^2 - 3t - 4 = 0$$

$$D = 9 + 16 = 25$$

$$t_1 = \frac{3 - 5}{2} = -1, \quad t_2 = \frac{3 + 5}{2} = 4$$

$t_1 = -1$ — отрицательное, при чётном n корней не даёт. $t_2 = 4$ — положительное: $x^4 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{4} = \pm\sqrt{2}$.

Ответ: $x = \pm\sqrt{2}$.

Пример 4

Когда один из t отрицательный (нечётная степень)

Решим уравнение:

$$x^6 - 2x^3 - 8 = 0$$

Замена $t = x^3$:

$$t^2 - 2t - 8 = 0$$

$$D = 4 + 32 = 36$$

$$t_1 = \frac{2 - 6}{2} = -2, \quad t_2 = \frac{2 + 6}{2} = 4$$

Показатель $n = 3$ нечётный, поэтому оба t дают корни:

$$x^3 = -2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$$

$$x^3 = 4 \Rightarrow x = \sqrt[3]{4}$$

Ответ: $x = -\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}$.

Пример 5

Когда $t = 0$ (чётная степень)

Рассмотрим уравнение:

$$x^{10} - 5x^5 = 0$$

Замена $t = x^5$:

$$t^2 - 5t = 0$$

$$t(t - 5) = 0$$

$$t_1 = 0, \quad t_2 = 5$$

Показатель $n = 5$ нечётный, поэтому:

$$x^5 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x^5 = 5 \Rightarrow x = \sqrt[5]{5}$$

Ответ: $x = 0, \sqrt[5]{5}$.

Пример 6

Когда после замены получаются иррациональные t

Решим уравнение:

$$x^6 - 4x^3 + 2 = 0$$

Замена $t = x^3$:

$$t^2 - 4t + 2 = 0$$

$$D = 16 - 8 = 8$$

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

Оба корня положительные. Показатель нечётный, поэтому:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{2}}, \quad x = \sqrt[3]{2 - \sqrt{2}}$$

Ответ: $x = \sqrt[3]{2 \pm \sqrt{2}}$.

Пример 7

Когда уравнение не сразу трёхчленное

Иногда уравнение нужно сначала преобразовать. Например:

$$x^{12} - 3x^6 - 4 = 0$$

Уже готово — это трёхчленное с $n = 6$. Замена $t = x^6$:

$$t^2 - 3t - 4 = 0$$

$$t_1 = -1, \quad t_2 = 4$$

$n = 6$ чётное, поэтому $t_1 = -1$ отбрасываем, $t_2 = 4$ даёт:

$$x^6 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt[6]{4} = \pm\sqrt[3]{2}$$

Ответ: $x = \pm\sqrt[3]{2}$.

Пример 8

Общая формула

Решим уравнение в общем виде:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

Делаем замену $t = x^n$:

$$at^2 + bt + c = 0$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Дальше для каждого найденного t решаем $x^n = t$ с учётом чётности n.

Задачи

1. Решите трёхчленные уравнения ($n = 3$):

1) $x^6 - 7x^3 + 6 = 0$

2) $x^6 - 8x^3 + 15 = 0$

3) $x^6 - 9x^3 + 18 = 0$

4) $x^6 + 7x^3 + 6 = 0$

5) $x^6 + 8x^3 + 15 = 0$

6) $x^6 + 9x^3 + 18 = 0$

7) $x^6 - 3x^3 - 4 = 0$

8) $x^6 - 5x^3 - 6 = 0$

9) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

10) $x^6 + 3x^3 - 4 = 0$

11) $x^6 + 5x^3 - 6 = 0$

12) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

2. Решите трёхчленные уравнения ($n = 4$):

1) $x^8-17x^4+16=0$
4) $x^8+17x^4+16=0$
7) $x^8-3x^4-4=0$
10) $x^8+3x^4-4=0$
2) $x^8-18x^4+17=0$
5) $x^8+18x^4+17=0$
8) $x^8-5x^4-6=0$
11) $x^8+5x^4-6=0$
3) $x^8-19x^4+18=0$
6) $x^8+19x^4+18=0$
9) $x^8-7x^4-8=0$
12) $x^8+7x^4-8=0$

3. Решите трёхчленные уравнения ($n=5$):

1) $x^{10}-33x^5+32=0$
4) $x^{10}+33x^5+32=0$
7) $x^{10}-3x^5-4=0$
10) $x^{10}+3x^5-4=0$
2) $x^{10}-34x^5+33=0$
5) $x^{10}+34x^5+33=0$
8) $x^{10}-5x^5-6=0$
11) $x^{10}+5x^5-6=0$
3) $x^{10}-35x^5+34=0$
6) $x^{10}+35x^5+34=0$
9) $x^{10}-7x^5-8=0$
12) $x^{10}+7x^5-8=0$

4. Решите трёхчленные уравнения с дробными коэффициентами:

1) $2x^6-5x^3+2=0$
5) $3x^8-7x^4+2=0$
9) $4x^{10}-9x^5+2=0$
2) $3x^6-7x^3+2=0$
6) $4x^8-9x^4+2=0$
10) $2x^6+5x^3+2=0$
3) $4x^6-9x^3+2=0$
7) $2x^{10}-5x^5+2=0$
11) $2x^8+5x^4+2=0$
4) $2x^8-5x^4+2=0$
8) $3x^{10}-7x^5+2=0$
12) $2x^{10}+5x^5+2=0$

5. Найдите все действительные корни уравнений:

1) $x^6-4x^3+3=0$
5) $x^8-8x^4+7=0$
9) $x^{10}-9x^5+8=0$
2) $x^6-4x^3-5=0$
6) $x^8-10x^4+9=0$
10) $x^{12}-7x^6+6=0$
3) $x^6-6x^3+8=0$
7) $x^{10}-5x^5+4=0$
11) $x^{12}-9x^6+8=0$
4) $x^8-6x^4+5=0$
8) $x^{10}-7x^5+6=0$
12) $x^{12}-11x^6+10=0$

6. Решите уравнения с иррациональными ответами:

1) $x^6-4x^3+2=0$
5) $x^8-4x^4-2=0$
9) $x^{10}-6x^5+3=0$
2) $x^6-4x^3-2=0$
6) $x^8-6x^4+3=0$
10) $x^{12}-4x^6+2=0$
3) $x^6-6x^3+3=0$
7) $x^{10}-4x^5+2=0$
11) $x^{12}-4x^6-2=0$
4) $x^8-4x^4+2=0$
8) $x^{10}-4x^5-2=0$
12) $x^{12}-6x^6+3=0$

Возвратные (симметричные) уравнения

Теория

В этой главе мы рассмотрим ещё один тип уравнений, которые сводятся к квадратным с помощью хитрых замен. Это так называемые возвратные (или симметричные) уравнения.

Определение: Возвратным уравнением четвёртой степени называется уравнение вида

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

где $a \neq 0$. Особенность такого уравнения в том, что коэффициенты читаются одинаково слева направо и справа налево.

Метод решения: Так как $x = 0$ не является корнем (проверьте: при $x = 0$ получаем $a = 0$, что противоречит условию), можно разделить обе части уравнения на x^2:

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$$

Перегруппируем слагаемые:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

Теперь сделаем замену:

$$t = x + \frac{1}{x}$$

Заметим, что

$$t^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$$

Подставляем в уравнение:

$$a(t^2 - 2) + bt + c = 0$$
$$at^2 + bt + (c - 2a) = 0$$

Получили квадратное уравнение относительно t. Решаем его, находим t, а затем возвращаемся к x через уравнение $x + \frac{1}{x} = t$, которое сводится к квадратному:

$$x^2 - tx + 1 = 0$$

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Простейшее возвратное уравнение

Пусть нам нужно решить уравнение:

$$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$$

Проверяем: коэффициенты: 1, 2, 2, 2, 1 — симметричны. $x = 0$ не корень (подстановка даёт $1 \neq 0$). Делим на x^2:

$$x^2 + 2x + 2 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

Группируем:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$$

Замена $t = x + \frac{1}{x}$, тогда $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$:

$$(t^2 - 2) + 2t + 2 = 0$$

$$t^2 + 2t = 0$$

$$t(t + 2) = 0$$

$$t_1 = 0, \quad t_2 = -2$$

Возвращаемся к x: Для $t = 0$: $x + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow$ нет действительных корней. Для $t = -2$: $x + \frac{1}{x} = -2 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$.

Ответ: $x = -1$ (кратности 2).

Пример 2

Уравнение с целыми корнями

Решим уравнение:

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0$$

Коэффициенты: 1, -5, 6, -5, 1 — симметричны. Делим на x^2:

$$x^2 - 5x + 6 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

Группируем:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$$

Замена $t = x + \frac{1}{x}$:

$$(t^2 - 2) - 5t + 6 = 0$$

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$t_1 = 1, \quad t_2 = 4$$

Для $t = 1$: $x + \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0$, $D = 1 - 4 = -3$ — нет корней. Для $t = 4$: $x + \frac{1}{x} = 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$, $D = 16 - 4 = 12$, $x = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$.

Ответ: $x = 2 \pm \sqrt{3}$.

Пример 3

Когда коэффициенты не 1

Рассмотрим уравнение:

$$2x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0$$

Проверяем симметричность: 2, -3, -1, -3, 2 — да, симметричны. Делим на x^2:

$$2x^2 - 3x - 1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$$

Группируем:

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$$

Замена $t = x + \frac{1}{x}$:

$$2(t^2 - 2) - 3t - 1 = 0$$

$$2t^2 - 4 - 3t - 1 = 0$$

$$2t^2 - 3t - 5 = 0$$

$$D = 9 + 40 = 49$$

$$t_1 = \frac{3 - 7}{4} = -1, \quad t_2 = \frac{3 + 7}{4} = \frac{10}{4} = 2.5$$

Для $t = -1$: $x + \frac{1}{x} = -1 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0$, $D = 1 - 4 = -3$ — нет корней. Для $t = \frac{5}{2}$: $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$, $D = 25 - 16 = 9$, $x = \frac{5 \pm 3}{4}$, т.е. $x = 2$ или $x = \frac{1}{2}$.

Ответ: $x = \frac{1}{2}, 2$.

Пример 4

Когда уравнение имеет корень $x = 1$ или $x = -1$

Решим уравнение:

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

Проверяем: $x = 1$: $1 - 4 + 4 - 4 + 1 = -2 \neq 0$, $x = -1$: $1 + 4 + 4 + 4 + 1 = 14 \neq 0$. Значит, метод работает.

Делим на x^2:

$$x^2 - 4x + 4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0$$

Замена $t=x+\frac{1}{x}$:

$$(t^2-2)-4t+4=0$$

$$t^2-4t+2=0$$

$$D=16-8=8$$

$$t_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{2}}{2}=2\pm\sqrt{2}$$

Оба t подходят. Решаем $x+\frac{1}{x}=t$: Для $t=2+\sqrt{2}$: $x^2-(2+\sqrt{2})x+1=0$, $D=(2+\sqrt{2})^2-4=4+4\sqrt{2}+2-4=2+4\sqrt{2}>0$, корни будут, но громоздкие. Аналогично для $t=2-\sqrt{2}$.

Ответ можно оставить в таком виде.

Пример 5

Когда в уравнении пропущены члены

Иногда возвратное уравнение может иметь пропуски. Например:

$$x^4+2x^2+1=0$$

Здесь коэффициенты: 1, 0, 2, 0, 1 — тоже симметричны (нули на местах x^3 и x). Метод работает так же.

Делим на x^2:

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2=0$$

$$(t^2-2)+2=0$$

$$t^2=0\Rightarrow t=0$$

$$x+\frac{1}{x}=0\Rightarrow x^2+1=0\Rightarrow \text{нет корней}$$

Ответ: корней нет.

Пример 6

Уравнение высшей степени

Метод можно обобщить на возвратные уравнения более высоких степеней. Например, для уравнения шестой степени:

$$ax^6+bx^5+cx^4+dx^3+cx^2+bx+a=0$$

Делим на x^3, делаем замену $t=x+\frac{1}{x}$, и используем формулы для $x^2+\frac{1}{x^2}$ и $x^3+\frac{1}{x^3}$.

Задачи

1. Решите возвратные уравнения:

1) $x^4+2x^3+2x^2+2x+1=0$

2) $x^4+3x^3+3x^2+3x+1=0$

3) $x^4+4x^3+4x^2+4x+1=0$

4) $x^4-2x^3+2x^2-2x+1=0$

5) $x^4-3x^3+3x^2-3x+1=0$

6) $x^4-4x^3+4x^2-4x+1=0$

7) $x^4+x^3+x^2+x+1=0$

8) $x^4-x^3+x^2-x+1=0$

9) $x^4+2x^3+3x^2+2x+1=0$

10) $x^4+3x^3+4x^2+3x+1=0$

11) $x^4+4x^3+5x^2+4x+1=0$

12) $x^4-2x^3+3x^2-2x+1=0$

2. Решите возвратные уравнения с коэффициентами, не равными 1:

1) $2x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 5x + 2 = 0$

2) $3x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 3 = 0$

3) $4x^4 - 5x^3 + x^2 - 5x + 4 = 0$

4) $2x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 5x + 2 = 0$

5) $3x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 4x + 3 = 0$

6) $4x^4 + 5x^3 + x^2 + 5x + 4 = 0$

7) $2x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0$

8) $3x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 4x + 3 = 0$

9) $4x^4 - 5x^3 - 3x^2 - 5x + 4 = 0$

10) $2x^4 + 3x^3 - x^2 + 3x + 2 = 0$

11) $3x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 4x + 3 = 0$

12) $4x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 5x + 4 = 0$

3. Найдите все действительные корни уравнений:

1) $x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 1 = 0$

2) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 5x + 1 = 0$

3) $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0$

4) $x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 6x + 1 = 0$

5) $x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 6x + 1 = 0$

6) $x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 = 0$

7) $x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 7x + 1 = 0$

8) $x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 7x + 1 = 0$

9) $x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 7x + 1 = 0$

10) $x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 8x + 1 = 0$

11) $x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 8x + 1 = 0$

12) $x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 8x + 1 = 0$

4. Решите уравнения, предварительно проверив, являются ли они возвратными:

1) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$

2) $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1 = 0$

3) $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 2x + 1 = 0$

4) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$

5) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 1 = 0$

6) $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 2x + 1 = 0$

7) $2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 2 = 0$

8) $2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 3x + 2 = 0$

9) $2x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 3x + 2 = 0$

10) $3x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 3 = 0$

11) $3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 3 = 0$

12) $3x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 4x + 3 = 0$

5. Решите уравнения с иррациональными ответами:

1) $x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0$

2) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = 0$

3) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 1 = 0$

4) $x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 6x + 1 = 0$

5) $x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 6x + 1 = 0$

6) $x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 6x + 1 = 0$

7) $x^4 - 8x^3 + 5x^2 - 8x + 1 = 0$

8) $x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 8x + 1 = 0$

9) $x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 8x + 1 = 0$

10) $2x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 5x + 2 = 0$

11) $2x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 5x + 2 = 0$

12) $2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = 0$

Однородные уравнения

Теория

В этой главе мы рассмотрим ещё один важный тип уравнений — однородные уравнения. Они часто встречаются в системах уравнений, но бывают и уравнения с одной переменной, которые сводятся к однородным.

Определение: Однородным уравнением n-й степени относительно переменных x и y называется уравнение, в котором каждый член имеет одну и ту же суммарную степень. Например:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0$$

— однородное уравнение второй степени относительно x и y.

В уравнениях с одной переменной мы часто сталкиваемся с ситуацией, когда можно ввести вторую переменную и сделать уравнение однородным.

Метод решения: Для уравнения вида

$$ax^4 + bx^2y^2 + cy^4 = 0$$

где $y \neq 0$, можно разделить обе части на y^4 и сделать замену $t = \frac{x}{y}$:

$$a\left(\frac{x}{y}\right)^4 + b\left(\frac{x}{y}\right)^2 + c = 0$$

$$at^4 + bt^2 + c = 0$$

Получили биквадратное уравнение относительно t. Решаем его, находим t, а затем $x = ty$.

Если же уравнение дано с одной переменной, например:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

то это не однородное, а биквадратное (мы его уже проходили). Однородные уравнения появляются, когда есть две переменные или когда можно искусственно ввести вторую переменную.

Пример из реальной жизни: Чаще всего однородные уравнения встречаются в системах вида:

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = 0 \\ \text{второе уравнение} \end{cases}$$

Тогда из первого уравнения делением на y^2 (при $y \neq 0$) получаем уравнение для $t = x/y$.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Однородное уравнение второй степени

Пусть нам нужно решить уравнение:

$$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$$

Это однородное уравнение второй степени. Если $y = 0$, то из уравнения получаем $x^2 = 0$, т.е. $x = 0$. Проверим: $(0, 0)$ — решение.

Если $y \neq 0$, делим обе части на y^2:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 3\left(\frac{x}{y}\right) + 2 = 0$$

Замена $t = x/y$:

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$t_1 = 1, \quad t_2 = 2$$

Значит, $x/y = 1$ или $x/y = 2$, т.е. $x = y$ или $x = 2y$.

Таким образом, решения: $(0, 0)$ и все пары вида (y, y) и $(2y, y)$ при любом $y \neq 0$.

Пример 2

Однородное уравнение четвёртой степени

Рассмотрим уравнение:

$$x^4 - 5x^2y^2 + 4y^4 = 0$$

При $y = 0$ получаем $x^4 = 0 \Rightarrow x = 0$.

При $y \neq 0$ делим на y^4:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^4 - 5\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 4 = 0$$

Замена $t = x/y$:

$$t^4 - 5t^2 + 4 = 0$$

Это биквадратное уравнение. Замена $u = t^2$:

$$u^2 - 5u + 4 = 0$$

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 4$$

Возвращаемся к t:

$$t^2 = 1 \Rightarrow t = \pm 1$$

$$t^2 = 4 \Rightarrow t = \pm 2$$

Значит, $x/y = \pm 1$ или $x/y = \pm 2$, т.е. $x = \pm y$ или $x = \pm 2y$.

Решения: $(0, 0)$ и все пары (y, y), $(-y, y)$, $(2y, y)$, $(-2y, y)$ при любом $y \neq 0$.

Пример 3

Уравнение с одной переменной, сводящееся к однородному

Иногда можно искусственно ввести вторую переменную. Например:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

Это не однородное, а биквадратное. Но если бы было, скажем:

$$x^4 - 5x^2y^2 + 4y^4 = 0$$

то это уже однородное.

В уравнениях с одной переменной метод однородности применяется реже, но встречается в системах.

Пример 4

Система с однородным уравнением

Решим систему:

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Из первого уравнения, как в примере 1, получаем: либо $x = y$, либо $x = 2y$ (при $y \neq 0$; случай $y = 0$ даёт $x = 0$, но тогда $x + y = 0 \neq 3$).

Подставляем во второе:

- Если $x = y$, то $x + y = 2x = 3 \Rightarrow x = 1.5$, тогда $y = 1.5$.
- Если $x = 2y$, то $x + y = 2y + y = 3y = 3 \Rightarrow y = 1$, тогда $x = 2$.

Ответ: $(1.5, 1.5)$ и $(2, 1)$.

Пример 5

Когда однородное уравнение имеет только нулевое решение

Рассмотрим уравнение:

$$x^2 + xy + y^2 = 0$$

При $y \neq 0$ делим на y^2:

$$t^2 + t + 1 = 0$$

$$D = 1 - 4 = -3 < 0$$

Значит, действительных корней нет.

При $y = 0$ получаем $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$.

Единственное действительное решение: $(0, 0)$.

Пример 6

Однородное уравнение третьей степени

Решим уравнение:

$$x^3 - 2x^2y + xy^2 = 0$$

При $y = 0$ получаем $x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$.

При $y \neq 0$ делим на y^3:

$$t^3 - 2t^2 + t = 0$$

$$t(t^2 - 2t + 1) = 0$$

$$t(t-1)^2 = 0$$

$$t = 0 \quad \text{или} \quad t = 1$$

$t = 0$ даёт $x = 0$ (уже учли). $t = 1$ даёт $x = y$.

Решения: $(0, 0)$ и все пары (y, y) при любом $y \neq 0$.

Пример 7

Общий метод для однородных уравнений степени n

Для уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_ny^n = 0$$

при $y \neq 0$ делим на y^n и получаем уравнение для $t = x/y$:

$$a_0t^n + a_1t^{n-1} + a_2t^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

Решаем это уравнение, находим t, затем $x = ty$.

Случай $y = 0$ рассматриваем отдельно.

Задачи

1. Решите однородные уравнения второй степени:

1) $x^2 - 2xy + y^2 = 0$

2) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$

3) $x^2 - 4xy + 3y^2 = 0$

4) $x^2 + 2xy + y^2 = 0$

5) $x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$

6) $x^2 + 4xy + 3y^2 = 0$

7) $x^2 - 5xy + 6y^2 = 0$

8) $x^2 - 5xy + 4y^2 = 0$

9) $x^2 - 5xy + 5y^2 = 0$

10) $x^2 + 5xy + 6y^2 = 0$

11) $x^2 + 5xy + 4y^2 = 0$

12) $x^2 + 5xy + 5y^2 = 0$

2. Решите однородные уравнения четвёртой степени:

1) $x^4 - 5x^2y^2 + 4y^4 = 0$

2) $x^4 - 10x^2y^2 + 9y^4 = 0$

3) $x^4 - 13x^2y^2 + 36y^4 = 0$

4) $x^4 - 2x^2y^2 - 8y^4 = 0$

5) $x^4 - 3x^2y^2 - 10y^4 = 0$

6) $x^4 - 4x^2y^2 - 12y^4 = 0$

7) $x^4 + 5x^2y^2 + 4y^4 = 0$

8) $x^4 + 10x^2y^2 + 9y^4 = 0$

9) $x^4 + 13x^2y^2 + 36y^4 = 0$

10) $x^4 - 6x^2y^2 + 8y^4 = 0$

11) $x^4 - 7x^2y^2 + 12y^4 = 0$

12) $x^4 - 8x^2y^2 + 15y^4 = 0$

3. Решите однородные уравнения третьей степени:

1) $x^3-3x^2y+2xy^2=0$

2) $x^3-4x^2y+3xy^2=0$

3) $x^3-5x^2y+4xy^2=0$

4) $x^3+3x^2y+2xy^2=0$

5) $x^3+4x^2y+3xy^2=0$

6) $x^3+5x^2y+4xy^2=0$

7) $x^3-2x^2y-3xy^2=0$

8) $x^3-3x^2y-4xy^2=0$

9) $x^3-4x^2y-5xy^2=0$

10) $x^3+2x^2y-3xy^2=0$

11) $x^3+3x^2y-4xy^2=0$

12) $x^3+4x^2y-5xy^2=0$

4. Решите системы уравнений с однородным первым уравнением:

1) $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 \\ x+y=3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2-4xy+3y^2=0 \\ x-y=2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2-5xy+4y^2=0 \\ 2x+y=5 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2+2xy+y^2=0 \\ x+2y=3 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=0 \\ 3x-y=4 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2+4xy+3y^2=0 \\ x-2y=1 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=0 \\ x+y=2 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^2-3xy-4y^2=0 \\ 2x-y=3 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x^2-4xy-5y^2=0 \\ x+2y=4 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^3-x^2y-2xy^2=0 \\ x+y=3 \end{cases}$

11) $\begin{cases} x^3-2x^2y-3xy^2=0 \\ 2x-y=1 \end{cases}$

12) $\begin{cases} x^4-5x^2y^2+4y^4=0 \\ x+y=2 \end{cases}$

5. Найдите все действительные решения уравнений (включая нулевые):

1) $x^2+xy+y^2=0$

2) $x^2-xy+y^2=0$

3) $x^2+2xy+2y^2=0$

4) $x^2-2xy+2y^2=0$

5) $x^2+xy+2y^2=0$

6) $x^2-xy+2y^2=0$

7) $x^4+x^2y^2+y^4=0$

8) $x^4-x^2y^2+y^4=0$

9) $x^4+2x^2y^2+2y^4=0$

10) $x^3+x^2y+xy^2+y^3=0$

11) $x^3-x^2y+xy^2-y^3=0$

12) $x^3+2x^2y+2xy^2+y^3=0$

Схема Горнера (общий принцип)

Теория

В этой главе мы познакомимся с мощным инструментом для работы с многочленами — схемой Горнера. С её помощью можно быстро делить многочлен на $(x - a)$ и находить значение многочлена в точке $x = a$.

Зачем нужна схема Горнера

Когда мы решаем уравнения высших степеней, часто приходится делить многочлен на $(x - a)$, где a — предполагаемый корень. Обычное деление "уголком"громоздко и легко приводит к ошибкам. Схема Горнера позволяет выполнить деление быстро и компактно.

Как работает схема Горнера

Пусть у нас есть многочлен

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

и мы хотим разделить его на $(x - c)$. Схема Горнера представляет собой таблицу:

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 \\ c & & & & & \\ \hline & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & r \end{array}$$

Алгоритм:

1. В верхней строке записываем все коэффициенты многочлена (обязательно включая нулевые для пропущенных степеней).
2. Сносим первый коэффициент a_n вниз без изменений — это b_n.
3. Умножаем b_n на c, записываем результат под следующим коэффициентом.
4. Складываем этот результат со следующим коэффициентом, записываем сумму внизу — это b_{n-1}.
5. Повторяем шаги 3-4 для всех коэффициентов.
6. Последнее полученное число — это остаток $r = P(c)$.

Если $r = 0$, то c — корень многочлена, а числа в нижней строке (кроме последнего) — коэффициенты частного от деления на $(x - c)$.

Важное замечание: Схема Горнера работает для любого c — целого, дробного, даже комплексного. Но на практике мы чаще всего используем её для проверки целых корней.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Деление многочлена на $(x - 2)$

Пусть нам нужно разделить многочлен $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ на $(x - 2)$.

Записываем коэффициенты: $2, -3, 4, -5$. Число $c = 2$.

Строим таблицу: $\begin{array}{c|cccc} & 2 & -3 & 4 & -5 \\ 2 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$

Сносим первый коэффициент: $\begin{array}{c|cccc} & 2 & -3 & 4 & -5 \\ 2 & & & & \\ \hline & 2 & & & \end{array}$

Умножаем 2 на $c = 2$, получаем 4, записываем под -3: $\begin{array}{c|cccc} & 2 & -3 & 4 & -5 \\ 2 & & 4 & & \\ \hline & 2 & & & \end{array}$

Складываем $-3 + 4 = 1$, записываем внизу: $\begin{array}{c|cccc} & 2 & -3 & 4 & -5 \\ 2 & & 4 & & \\ \hline & 2 & 1 & & \end{array}$

Умножаем 1 на 2, получаем 2, записываем под 4:
$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -3 & 4 & -5 \\ 2 & & 4 & 2 & \\ \hline & 2 & 1 & & \end{array}$$

Складываем $4 + 2 = 6$, записываем:
$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -3 & 4 & -5 \\ 2 & & 4 & 2 & \\ \hline & 2 & 1 & 6 & \end{array}$$

Умножаем 6 на 2, получаем 12, записываем под -5:
$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -3 & 4 & -5 \\ 2 & & 4 & 2 & 12 \\ \hline & 2 & 1 & 6 & \end{array}$$

Складываем $-5 + 12 = 7$, записываем:
$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -3 & 4 & -5 \\ 2 & & 4 & 2 & 12 \\ \hline & 2 & 1 & 6 & 7 \end{array}$$

Последнее число 7 — это остаток. Значит, $P(2) = 7$, и 2 не является корнем.
Частное от деления: $2x^2 + 1x + 6$, то есть $2x^2 + x + 6$.
Проверка: $(x-2)(2x^2 + x + 6) + 7 = 2x^3 + x^2 + 6x - 4x^2 - 2x - 12 + 7 = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$. Всё верно.

Пример 2

Когда деление происходит нацело

Разделим $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ на $(x-1)$.
Коэффициенты: $1, -6, 11, -6$. $c = 1$.
$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -6 & 11 & -6 \\ 1 & & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$
Остаток 0, значит, $x = 1$ — корень. Частное: $x^2 - 5x + 6$.
Таким образом, $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$.

Пример 3

Проверка отрицательного корня

Проверим, является ли $x = -2$ корнем многочлена $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 1$.
Коэффициенты: $2, 3, -4, 1$. $c = -2$.
$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 3 & -4 & 1 \\ -2 & & -4 & 2 & 4 \\ \hline & 2 & -1 & -2 & 5 \end{array}$$
Остаток $5 \neq 0$, значит, $x = -2$ не корень.

Пример 4

Многочлен с пропущенными степенями

Разделим $P(x) = x^4 - 3x^2 + 2x + 1$ на $(x-2)$. Здесь нет члена с x^3, поэтому коэффициент при x^3 равен 0.
Коэффициенты: $1, 0, -3, 2, 1$. $c = 2$.
$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & & 2 & 4 & 2 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 4 & 9 \end{array}$$
Остаток 9, частное: $x^3 + 2x^2 + 1x + 4$, то есть $x^3 + 2x^2 + x + 4$.

Пример 5

Нахождение значения многочлена в точке

Схему Горнера можно использовать и просто для вычисления $P(c)$. Например, найдём $P(3)$ для $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 2x + 7$.
Коэффициенты: $2, -5, 3, -2, 7$. $c = 3$.
$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & -5 & 3 & -2 & 7 \\ 3 & & 6 & 3 & 18 & 48 \\ \hline & 2 & 1 & 6 & 16 & 55 \end{array}$$

$P(3) = 55$.

Пример 6

Общий вид схемы

Для многочлена $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ и числа c схема Горнера даёт:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_1	a_0
c		$b_n c$	$b_{n-1}c$	$\dots$	$b_2 c$	$b_1 c$
	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	$\dots$	b_1	r

где $b_n = a_n$, $b_{n-1} = a_{n-1} + b_n c$, $b_{n-2} = a_{n-2} + b_{n-1}c$, и так далее, а $r = a_0 + b_1 c$ — остаток.

Задачи

1. Используя схему Горнера, найдите значение многочлена в указанной точке:

1) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$, $x = 2$
2) $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5x + 1$, $x = 1$
3) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 3$, $x = -1$
4) $P(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + 4$, $x = 2$
5) $P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$, $x = -2$
6) $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x + 2$, $x = 3$
7) $P(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6$, $x = 1$
8) $P(x) = 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 6x + 7$, $x = -1$
9) $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$, $x = 0$
10) $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 6x - 8$, $x = -2$
11) $P(x) = x^4 - 3x^2 + 2x + 1$, $x = 2$
12) $P(x) = x^5 - 32$, $x = 2$

2. Выполните деление многочлена на $(x - c)$ с помощью схемы Горнера. Запишите частное и остаток:

1) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ на $(x - 1)$
2) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ на $(x - 2)$
3) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ на $(x + 1)$
4) $2x^3 - 5x^2 + 3x - 4$ на $(x - 2)$
5) $3x^3 + 4x^2 - 5x + 2$ на $(x + 2)$
6) $4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ на $(x - 3)$
7) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$ на $(x - 1)$
8) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$ на $(x - 2)$
9) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$ на $(x + 2)$
10) $2x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6$ на $(x - 1)$
11) $3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 4x - 3$ на $(x + 1)$
12) $4x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 7x + 8$ на $(x - 2)$

3. Проверьте, является ли c корнем многочлена:

1) $x^3 - 3x^2 + 4x - 2$, $c = 1$
2) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$, $c = 2$
3) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$, $c = 2$
4) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, $c = 3$
5) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$, $c = -2$
6) $x^3 - 5x^2 - 2x + 24$, $c = 4$
7) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$, $c = 2$
8) $x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 22x + 24$, $c = 3$
9) $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$, $c = -4$
10) $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$, $c = 3$
11) $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$, $c = -2$
12) $3x^3 - 4x^2 - 5x + 2$, $c = 2$

4. Заполните пропуски в схеме Горнера:

1)

	2	-5	3	-4
3		6	-3	0
	2	1	0	?

2)

	1	-4	5	-2
2		2	-4	2
	1	-2	1	?

3)

	3	2	-5	1
-1		-3	1	4
	3	-1	-4	?

4)

	1	0	-3	2	-1
2		2	4	2	8
	1	2	1	4	?

5)

	2	-1	0	3	-5
-2		-4	10	-20	34
	2	-5	10	-17	?

6)

	4	-3	2	-1
1		4	1	3
	4	1	3	?

5. Используя схему Горнера, разложите многочлен на множители, если известен один корень:

1) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, $x = 1$ — корень
2) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$, $x = 2$ — корень
3) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$, $x = -1$ — корень
4) $x^3 - 5x^2 - 2x + 24$, $x = 4$ — корень
5) $x^3 + 3x^2 - 10x - 24$, $x = 3$ — корень
6) $x^3 - 8x^2 + 19x - 12$, $x = 1$ — корень

7) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$, $x = 1$ — корень

8) $x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 22x + 24$, $x = 2$ — корень

9) $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$, $x = 3$ — корень

10) $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$, $x = 2$ — корень

11) $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$, $x = -2$ — корень

12) $3x^3 - 4x^2 - 5x + 2$, $x = 1$ — корень

Схема Горнера для кубических уравнений

Теория

В этой главе мы применим схему Горнера для решения кубических уравнений. Как мы знаем, кубическое уравнение в общем виде записывается как

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

где $a \neq 0$.

Идея метода: Если нам удаётся найти один корень уравнения $x = x_1$, то мы можем разделить исходный многочлен на $(x - x_1)$ с помощью схемы Горнера и получить квадратное уравнение. Решая это квадратное уравнение, находим остальные два корня.

Как искать первый корень: Чаще всего первый корень ищут среди делителей свободного члена d (если $a = 1$) или среди делителей отношения d/a (если $a \neq 1$). Подставляем эти числа в уравнение или используем схему Горнера для проверки.

Алгоритм решения кубического уравнения:

1. Выписываем все возможные рациональные корни (делители свободного члена, делённые на делители старшего коэффициента).
2. С помощью схемы Горнера проверяем эти числа, пока не найдём корень (остаток 0).
3. Получаем квадратное уравнение из коэффициентов, полученных в схеме Горнера.
4. Решаем квадратное уравнение.
5. Записываем все три корня.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Кубическое уравнение с целыми корнями

Решим уравнение:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

Свободный член: -6. Его делители: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$.

Проверяем $x = 1$ с помощью схемы Горнера:

	1	-6	11	-6
1		1	-5	6
	1	-5	6	0

Остаток 0, значит, $x = 1$ — корень. Частное: $x^2 - 5x + 6$.

Решаем квадратное уравнение:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$D = 25 - 24 = 1$$

$$x_2 = \frac{5-1}{2} = 2, \quad x_3 = \frac{5+1}{2} = 3$$

Ответ: $x = 1, 2, 3$.

Пример 2

Уравнение с отрицательными корнями

Решим уравнение:

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$$

Делители свободного члена -6: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$.

Проверяем $x = 1$:

	1	2	-5	-6
1		1	3	-2
	1	3	-2	-8

Остаток $-8 \neq 0$, не подходит.

Проверяем $x = -1$: $\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & -5 & -6 \\ -1 & & -1 & -1 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$ Остаток 0, значит, $x = -1$ — корень. Частное: $x^2 + x - 6$.

Решаем квадратное уравнение:

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$D = 1 + 24 = 25$$

$$x_2 = \frac{-1-5}{2} = -3, \quad x_3 = \frac{-1+5}{2} = 2$$

Ответ: $x = -3, -1, 2$.

Пример 3

Когда первый коэффициент не равен 1

Решим уравнение:

$$2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0$$

Здесь $a = 2$. Возможные рациональные корни: делители 6 $(\pm1, \pm2, \pm3, \pm6)$ делённые на делители 2 $(\pm1, \pm2)$. Получаем: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$.

Проверяем $x = 1$: $\begin{array}{c|cccc} & 2 & -3 & -11 & 6 \\ 1 & & 2 & -1 & -12 \\ \hline & 2 & -1 & -12 & -6 \end{array}$ Не подходит.

Проверяем $x = 2$: $\begin{array}{c|cccc} & 2 & -3 & -11 & 6 \\ 2 & & 4 & 2 & -18 \\ \hline & 2 & 1 & -9 & -12 \end{array}$ Не подходит.

Проверяем $x = 3$: $\begin{array}{c|cccc} & 2 & -3 & -11 & 6 \\ 3 & & 6 & 9 & -6 \\ \hline & 2 & 3 & -2 & 0 \end{array}$ Остаток 0, значит, $x = 3$ — корень. Частное: $2x^2 + 3x - 2$.

Решаем квадратное уравнение:

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$D = 9 + 16 = 25$$

$$x_2 = \frac{-3-5}{4} = \frac{-8}{4} = -2, \quad x_3 = \frac{-3+5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $x = -2, \frac{1}{2}, 3$.

Пример 4

Когда корень дробный

Решим уравнение:

$$3x^3 - 4x^2 - 5x + 2 = 0$$

Возможные корни: делители 2 $(\pm1, \pm2)$ делённые на делители 3 $(\pm1, \pm3)$: $\pm1, \pm2, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}$.

Проверяем $x = 1$: $\begin{array}{c|cccc} & 3 & -4 & -5 & 2 \\ 1 & & 3 & -1 & -6 \\ \hline & 3 & -1 & -6 & -4 \end{array}$ Не подходит.

Проверяем $x = -1$: $\begin{array}{c|cccc} & 3 & -4 & -5 & 2 \\ -1 & & -3 & 7 & -2 \\ \hline & 3 & -7 & 2 & 0 \end{array}$ Остаток 0, значит, $x = -1$ — корень. Частное: $3x^2 - 7x + 2$.

Решаем квадратное уравнение:

$$3x^2 - 7x + 2 = 0$$

$$D = 49 - 24 = 25$$

$$x_2 = \frac{7-5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad x_3 = \frac{7+5}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

Ответ: $x = -1, \frac{1}{3}, 2$.

Пример 5

Когда есть кратный корень

Решим уравнение:

$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

Делители 2: $\pm 1, \pm 2$.

Проверяем $x = 1$: $\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$ Остаток 0, значит, $x = 1$ — корень. Частное: $x^2 + x - 2$.

Решаем квадратное уравнение:

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$x_2 = \frac{-1 - 3}{2} = -2, \quad x_3 = \frac{-1 + 3}{2} = 1$$

Получили $x = 1$ снова. Значит, корень $x = 1$ — кратный (второй кратности). Итого:

$$x = -2, \quad x = 1 \text{ (кратности 2)}$$

Пример 6

Когда корни иррациональные

Иногда после деления получается квадратное уравнение с иррациональными корнями. Например:

$$x^3 - 3x^2 - 2x + 4 = 0$$

Проверяем $x = 1$: $\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & -2 & 4 \\ 1 & & 1 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & -2 & -4 & 0 \end{array}$ Подходит. Частное: $x^2 - 2x - 4$.

Решаем:

$$D = 4 + 16 = 20$$

$$x_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

Ответ: $x = 1, 1 \pm \sqrt{5}$.

Пример 7

Когда нет рациональных корней

Если ни один из возможных рациональных корней не подходит, то уравнение не имеет рациональных корней. В этом случае приходится использовать либо приближённые методы, либо формулу Кардано (глава 21).

Например, для уравнения $x^3 - 3x + 1 = 0$ рациональных корней нет.

Задачи

1. Решите кубические уравнения, используя схему Горнера:

1) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

2) $x^3 - 7x + 6 = 0$

3) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

4) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$

5) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

6) $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$

7) $x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = 0$

8) $x^3 + 3x^2 - 10x - 24 = 0$

9) $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$

10) $x^3 + 5x^2 - 2x - 24 = 0$

11) $x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = 0$

12) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$

2. Решите кубические уравнения со старшим коэффициентом, не равным 1:

1) $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0$

2) $3x^3 - 4x^2 - 5x + 2 = 0$

3) $2x^3 + 5x^2 - x - 6 = 0$

4) $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = 0$

5) $4x^3 - 4x^2 - 11x + 6 = 0$

6) $6x^3 + 5x^2 - 3x - 2 = 0$

7) $2x^3 - 7x^2 - 17x + 10 = 0$

8) $3x^3 - 10x^2 - 9x + 4 = 0$

9) $4x^3 + 8x^2 - x - 2 = 0$

10) $6x^3-5x^2-2x+1=0$ 11) $2x^3+9x^2+7x-6=0$ 12) $3x^3-14x^2+13x-4=0$

3. Найдите все корни уравнений (включая кратные):

1) $x^3-3x+2=0$
2) $x^3-3x^2+4=0$
3) $x^3+3x^2-4=0$
4) $x^3-5x^2+8x-4=0$
5) $x^3-2x^2-4x+8=0$
6) $x^3+4x^2-8x-32=0$
7) $x^3-6x^2+12x-8=0$
8) $x^3+6x^2+12x+8=0$
9) $x^3-9x^2+27x-27=0$
10) $x^3+9x^2+27x+27=0$
11) $x^3-12x^2+48x-64=0$
12) $x^3+12x^2+48x+64=0$

4. Решите уравнения, предварительно найдя один корень подбором:

1) $x^3-2x^2-13x-10=0$
2) $x^3+5x^2+2x-8=0$
3) $x^3-7x^2+7x+15=0$
4) $x^3-8x^2+13x-6=0$
5) $x^3+8x^2+13x+6=0$
6) $x^3-10x^2+23x-14=0$
7) $x^3+10x^2+23x+14=0$
8) $x^3-9x^2+23x-15=0$
9) $x^3+9x^2+23x+15=0$
10) $x^3-11x^2+31x-21=0$
11) $x^3+11x^2+31x+21=0$
12) $x^3-12x^2+41x-30=0$

5. Решите уравнения с иррациональными корнями:

1) $x^3-3x^2-2x+4=0$ (один корень целый)
2) $x^3-3x^2-x+3=0$
3) $x^3-4x^2+x+2=0$
4) $x^3-4x^2-x+4=0$
5) $x^3-5x^2+2x+2=0$
6) $x^3-5x^2-2x+4=0$
7) $x^3-6x^2+3x+2=0$
8) $x^3-6x^2-3x+4=0$
9) $x^3-7x^2+4x+2=0$
10) $x^3-7x^2-4x+4=0$
11) $x^3-8x^2+5x+2=0$
12) $x^3-8x^2-5x+4=0$

Схема Горнера для уравнений четвёртой степени

Теория

В этой главе мы применим схему Горнера для решения уравнений четвёртой степени. Общий вид такого уравнения:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

где $a \neq 0$.

Идея метода: Если нам удаётся найти один корень уравнения $x = x_1$, то мы можем разделить исходный многочлен на $(x - x_1)$ с помощью схемы Горнера и получить уравнение третьей степени. Затем для полученного кубического уравнения снова ищем корень и понижаем степень дальше, пока не дойдём до квадратного уравнения.

Алгоритм решения уравнения четвёртой степени:

1. Выписываем все возможные рациональные корни (делители свободного члена e, делённые на делители старшего коэффициента a).
2. С помощью схемы Горнера проверяем эти числа, пока не найдём первый корень (остаток 0).
3. Получаем кубическое уравнение из коэффициентов, полученных в схеме Горнера.
4. Для кубического уравнения повторяем процесс: ищем корень, применяем схему Горнера, получаем квадратное уравнение.
5. Решаем квадратное уравнение.
6. Записываем все четыре корня.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Уравнение четвёртой степени с целыми корнями

Решим уравнение:

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$$

Свободный член: 24. Его делители: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24$.

Проверяем $x = 1$ с помощью схемы Горнера:

	1	-10	35	-50	24
1		1	-9	26	-24
	1	-9	26	-24	0

Остаток 0, значит, $x = 1$ — корень. Частное: $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$.

Теперь решаем кубическое уравнение $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$.

Делители свободного члена -24: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24$.

Проверяем $x = 2$:

	1	-9	26	-24
2		2	-14	24
	1	-7	12	0

Остаток 0, значит, $x = 2$ — корень. Частное: $x^2 - 7x + 12$.

Решаем квадратное уравнение:

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$D = 49 - 48 = 1$$

$$x_3 = \frac{7-1}{2} = 3, \quad x_4 = \frac{7+1}{2} = 4$$

Таким образом, исходное уравнение имеет четыре корня: $x = 1, 2, 3, 4$.

Пример 2

Уравнение с отрицательными корнями

Решим уравнение:

$$x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0$$

Делители 24: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24$.

Проверяем $x = 1$:

	1	2	-13	-14	24
1		1	3	-10	-24
	1	3	-10	-24	0

Остаток 0, значит, $x = 1$ — корень. Частное: $x^3 + 3x^2 - 10x - 24$.

Решаем кубическое уравнение $x^3 + 3x^2 - 10x - 24 = 0$.

Делители -24: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24$.

Проверяем $x = 2$:

	1	3	-10	-24
2		2	10	0
	1	5	0	-24

Остаток $-24 \neq 0$, не подходит.

Проверяем $x = -2$:

	1	3	-10	-24
-2		-2	-2	24
	1	1	-12	0

Остаток 0, значит, $x = -2$ — корень. Частное: $x^2 + x - 12$.

Решаем квадратное уравнение:

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$D = 1 + 48 = 49$$

$$x_3 = \frac{-1 - 7}{2} = -4, \quad x_4 = \frac{-1 + 7}{2} = 3$$

Корни: $x = -4, -2, 1, 3$.

Пример 3

Когда первый коэффициент не равен 1

Решим уравнение:

$$2x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 3x + 9 = 0$$

Здесь $a = 2$. Возможные рациональные корни: делители 9 $(\pm1, \pm3, \pm9)$ делённые на делители 2 $(\pm1, \pm2)$. Получаем: $\pm1, \pm3, \pm9, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{9}{2}$.

Проверяем $x = 1$:

	2	-3	-11	3	9
1		2	-1	-12	-9
	2	-1	-12	-9	0

Остаток 0, значит, $x = 1$ — корень. Частное: $2x^3 - x^2 - 12x - 9$.

Решаем кубическое уравнение $2x^3 - x^2 - 12x - 9 = 0$.

Для этого уравнения возможные корни: делители -9 $(\pm1, \pm3, \pm9)$ делённые на делители 2 $(\pm1, \pm2)$: $\pm1, \pm3, \pm9, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{9}{2}$.

Проверяем $x = 3$:

	2	-1	-12	-9
3		6	15	9
	2	5	3	0

Остаток 0, значит, $x = 3$ — корень. Частное: $2x^2 + 5x + 3$.

Решаем квадратное уравнение:

$$2x^2 + 5x + 3 = 0$$

$$D = 25 - 24 = 1$$

$$x_3 = \frac{-5 - 1}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}, \quad x_4 = \frac{-5 + 1}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

Корни: $x = -\frac{3}{2}, -1, 1, 3$.

Пример 4

Когда есть кратные корни

Решим уравнение:

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$$

Делители 1: ± 1.

Проверяем $x = 1$:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & & 1 & -3 & 3 & -1 \\ \hline & 1 & -3 & 3 & -1 & 0 \end{array}$$

Остаток 0, значит, $x = 1$ — корень. Частное: $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

Решаем кубическое уравнение $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$.

Проверяем $x = 1$ снова:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 3 & -1 \\ 1 & & 1 & -2 & 1 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}$$

Остаток 0, значит, $x = 1$ — снова корень. Частное: $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$.

Таким образом, исходный многочлен раскладывается как $(x-1)^4$, и уравнение имеет один корень $x = 1$ кратности 4.

Пример 5

Когда после первого деления получается кубическое уравнение без рациональных корней

Иногда после нахождения первого корня кубическое уравнение может не иметь рациональных корней. Тогда его нужно решать другими методами (формула Кардано или приближённо).

Например, для уравнения $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4 = 0$ можно найти один корень, а дальше получить кубическое уравнение, которое уже не решается подбором.

Задачи

1. Решите уравнения четвёртой степени, используя схему Горнера:

1) $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$
2) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$
3) $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0$
4) $x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 22x + 24 = 0$
5) $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 = 0$
6) $x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 22x + 24 = 0$
7) $x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30 = 0$
8) $x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 19x + 30 = 0$
9) $x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 27x - 54 = 0$
10) $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15 = 0$
11) $x^4 - 9x^3 + 20x^2 - 4x - 8 = 0$
12) $x^4 + 9x^3 + 20x^2 + 4x - 8 = 0$

2. Решите уравнения со старшим коэффициентом, не равным 1:

1) $2x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 3x + 9 = 0$
2) $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 4x + 9 = 0$
3) $2x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 5x + 3 = 0$
4) $3x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 4x + 5 = 0$
5) $4x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 5x + 4 = 0$
6) $6x^4 - 5x^3 - 12x^2 + 5x + 6 = 0$
7) $2x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 7x - 5 = 0$
8) $3x^4 - 8x^3 + 4x^2 + 8x - 7 = 0$
9) $4x^4 - 9x^3 + 5x^2 + 9x - 9 = 0$
10) $2x^4 + 7x^3 + 3x^2 - 7x - 5 = 0$
11) $3x^4 + 8x^3 + 4x^2 - 8x - 7 = 0$
12) $4x^4 + 9x^3 + 5x^2 - 9x - 9 = 0$

3. Найдите все корни уравнений (включая кратные):

1) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$
2) $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = 0$
3) $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 = 0$
4) $x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16 = 0$
5) $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 = 0$
6) $x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4 = 0$
7) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$
8) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$
9) $x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0$

10) $x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 7x + 2 = 0$

11) $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4 = 0$

12) $x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4 = 0$

4. Решите уравнения, последовательно понижая степень:

1) $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$

2) $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$

3) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$

4) $x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8 = 0$

5) $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x - 8 = 0$

6) $x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 7x - 9 = 0$

7) $x^4 - 8x^3 + 9x^2 + 8x - 10 = 0$

8) $x^4 + 8x^3 + 9x^2 - 8x - 10 = 0$

9) $x^4 - 9x^3 + 10x^2 + 9x - 11 = 0$

10) $x^4 - 10x^3 + 11x^2 + 10x - 12 = 0$

11) $x^4 + 10x^3 + 11x^2 - 10x - 12 = 0$

12) $x^4 - 11x^3 + 12x^2 + 11x - 13 = 0$

5. Решите уравнения с иррациональными корнями (после понижения степени):

1) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 2 = 0$ (один корень целый)

2) $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3 = 0$

3) $x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 3x - 3 = 0$

4) $x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 4 = 0$

5) $x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 4x - 4 = 0$

6) $x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 5x - 5 = 0$

7) $x^4 - 7x^3 + 6x^2 + 5x - 5 = 0$

8) $x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 6x - 6 = 0$

9) $x^4 - 8x^3 + 7x^2 + 6x - 6 = 0$

10) $x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 7x - 7 = 0$

11) $x^4 - 9x^3 + 8x^2 + 7x - 7 = 0$

12) $x^4 - 9x^3 + 7x^2 + 8x - 8 = 0$

Комбинированный метод

Теория

В этой главе мы объединим все изученные приёмы для решения уравнений высших степеней. Часто в одном уравнении нужно применить несколько методов: сначала вынести общий множитель, потом сделать замену, затем использовать схему Горнера и так далее.

Общий план действий:

1. Проверяем, можно ли вынести общий множитель за скобки.
2. Проверяем, не является ли уравнение биквадратным или трёхчленным (тогда делаем замену).
3. Проверяем, не является ли уравнение возвратным (симметричным).
4. Если ничего не подходит, ищем рациональные корни среди делителей свободного члена (или отношений делителей).
5. Используем схему Горнера для проверки найденных корней и понижения степени.
6. Для полученного уравнения меньшей степени повторяем процесс.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Вынесение + схема Горнера

Решим уравнение:

$$x^5 - 5x^4 + 4x^3 = 0$$

Сначала выносим общий множитель x^3:

$$x^3(x^2 - 5x + 4) = 0$$

Отсюда сразу получаем $x = 0$ (кратности 3) и решаем квадратное уравнение:

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$D = 25 - 16 = 9$$
$$x = \frac{5 \pm 3}{2} = 4 \text{ или } 1$$

Ответ: $x = 0, 1, 4$ (причём $x = 0$ — корень кратности 3).

Пример 2

Замена + схема Горнера

Решим уравнение:

$$x^6 - 7x^3 + 6 = 0$$

Это трёхчленное уравнение. Делаем замену $t = x^3$:

$$t^2 - 7t + 6 = 0$$

$$t_1 = 1, \quad t_2 = 6$$

Возвращаемся к x:

$$x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$
$$x^3 = 6 \Rightarrow x = \sqrt[3]{6}$$

Ответ: $x = 1, \sqrt[3]{6}$.

Пример 3

Возвратное уравнение

Решим уравнение:

$$x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = 0$$

Это возвратное уравнение (коэффициенты: 1, -4, 3, -4, 1). Делим на x^2:

$$x^2 - 4x + 3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3 = 0$$

Замена $t = x + \frac{1}{x}$, тогда $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$:

$$(t^2 - 2) - 4t + 3 = 0$$

$$t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$D = 16 - 4 = 12$$

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

Возвращаемся к x: $x + \frac{1}{x} = t$ умножаем на x:

$$x^2 - tx + 1 = 0$$

Для $t = 2 + \sqrt{3}$:

$$x^2 - (2 + \sqrt{3})x + 1 = 0$$

$$D = (2 + \sqrt{3})^2 - 4 = 4 + 4\sqrt{3} + 3 - 4 = 3 + 4\sqrt{3} > 0$$

Корни громоздкие, но существуют.

Аналогично для $t = 2 - \sqrt{3}$.

Пример 4

Комбинация: группировка + схема Горнера

Решим уравнение:

$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4 = 0$$

Попробуем сгруппировать:

$$(x^4 - 2x^3) + (-3x^2 + 4x + 4) = 0$$

Из первой группы выносим x^3, но вторая группа не даёт общей скобки. Группировка не удалась.

Попробуем найти рациональные корни. Делители 4: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.

Проверяем $x = 1$: $\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -2 & -3 & 4 & 4 \\ 1 & & 1 & -1 & -4 & 0 \\ \hline & 1 & -1 & -4 & 0 & 4 \end{array}$ Остаток $4 \neq 0$.

Проверяем $x = -1$: $\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -2 & -3 & 4 & 4 \\ -1 & & -1 & 3 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & -3 & 0 & 4 & 0 \end{array}$ Остаток 0! Значит, $x = -1$ — корень. Частное: $x^3 - 3x^2 + 0x + 4 = x^3 - 3x^2 + 4$.

Теперь решаем кубическое уравнение $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$.

Делители 4: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.

Проверяем $x = 2$: $\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & & 2 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$ Остаток 0, значит, $x = 2$ — корень. Частное: $x^2 - x - 2$.

Решаем квадратное уравнение:

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$x = \frac{1 \pm 3}{2} = 2 \text{ или } -1$$

Мы уже встречали $x = -1$ и $x = 2$. Таким образом, корни исходного уравнения: $x = -1$ (кратности 2) и $x = 2$ (кратности 2).

Ответ: $x = -1, 2$ (оба кратности 2).

Пример 5

Когда сначала нужно раскрыть скобки

Иногда уравнение дано в виде произведения. Например:

$$(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 5x + 6) = 0$$

Здесь вообще не нужно ничего применять — сразу решаем каждое квадратное уравнение:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1, 2$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2, 3$$

Ответ: $x = 1, 2, 3$ (причём $x = 2$ — корень кратности 2).

Пример 6

Сложный случай с заменой и схемой Горнера

Решим уравнение:

$$(x^2 - 2x)^2 - 5(x^2 - 2x) + 6 = 0$$

Делаем замену $t = x^2 - 2x$:

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$t_1 = 2, \quad t_2 = 3$$

Возвращаемся:

$$x^2 - 2x = 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow D = 4 + 8 = 12 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$x^2 - 2x = 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow D = 4 + 12 = 16 \Rightarrow x = \frac{2 \pm 4}{2} = 3 \text{ или } -1$$

Ответ: $x = -1, 3, 1 \pm \sqrt{3}$.

Пример 7

Уравнение, требующее нескольких подходов

Решим уравнение:

$$x^5 - x^4 - 4x^3 + 4x^2 = 0$$

Сначала выносим x^2:

$$x^2(x^3 - x^2 - 4x + 4) = 0$$

$$x = 0 \text{ (кратности 2)}$$

Теперь решаем $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$. Пробуем группировку:

$$(x^3 - x^2) + (-4x + 4) = 0$$

$$x^2(x - 1) - 4(x - 1) = 0$$

$$(x - 1)(x^2 - 4) = 0$$

$$(x - 1)(x - 2)(x + 2) = 0$$

Таким образом, $x = 1, 2, -2$.
Итого: $x = -2, 0, 0, 1, 2$, т.е. $x = -2, 0, 1, 2$ (с учётом кратности $x = 0$).

Задачи

1. Решите уравнения, комбинируя различные методы:

1) $x^5 - 5x^4 + 4x^3 = 0$

2) $x^6 - 7x^3 + 6 = 0$

3) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = 0$

4) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4 = 0$

5) $(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 5x + 6) = 0$

6) $(x^2 - 2x)^2 - 5(x^2 - 2x) + 6 = 0$

7) $x^5 - x^4 - 4x^3 + 4x^2 = 0$

8) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

9) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 4 = 0$

10) $x^5 - 3x^4 + 2x^3 = 0$

11) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

12) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0$

2. Решите уравнения повышенной сложности:

1) $x^7 - 2x^6 - 3x^5 = 0$

2) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$

3) $x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 = 0$

4) $x^6 - 4x^3 - 5 = 0$

5) $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x = 0$

6) $x^5 - 5x^3 + 4x = 0$

7) $(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = 0$

8) $(x^2 - 3x)^2 - 2(x^2 - 3x) - 8 = 0$

9) $x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 8x + 1 = 0$

10) $x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8 = 0$

11) $x^5 - 4x^4 + 4x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$

12) $x^6 - 3x^4 - 4x^2 = 0$

3. Найдите все корни уравнений (укажите кратность):

1) $x^5 - 2x^4 + x^3 = 0$

2) $x^6 - 4x^5 + 4x^4 = 0$

3) $x^7 - 3x^6 + 3x^5 - x^4 = 0$

4) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$

5) $x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0$

6) $x^6 - 2x^5 + x^4 - 2x^3 + x^2 = 0$

7) $x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$

8) $x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x = 0$

9) $x^6 + 2x^5 - x^4 - 4x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$

10) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$

11) $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1 = 0$

12) $x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1 = 0$

4. Определите, какой метод применить, и решите уравнение:

1) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

2) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

3) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0$

4) $x^5 - 4x^3 = 0$

5) $x^6 - 7x^3 + 12 = 0$

6) $x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 8x + 1 = 0$

7) $x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 = 0$

8) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 2 = 0$

9) $x^6 - 3x^4 - 4x^2 = 0$

10) $x^5 + x^4 - 4x^3 - 4x^2 = 0$

11) $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x = 0$

12) $x^7 - 2x^6 - x^5 + 2x^4 = 0$

5. Решите уравнения с параметром (для всех значений параметра):

1) $x^3 - 3ax^2 + 2a^2x = 0$

2) $x^4 - 5a^2x^2 + 4a^4 = 0$

3) $x^4 - 2ax^3 + a^2x^2 = 0$

4) $x^3 + ax^2 - 4a^2x - 4a^3 = 0$

5) $x^4 - (a + 1)x^2 + a = 0$

6) $x^4 - 2ax^2 + a^2 - 1 = 0$

7) $x^5 - ax^3 = 0$

8) $x^6 - a^3x^3 = 0$

9) $x^4 - 4ax^3 + 4a^2x^2 = 0$

10) $x^4 - 2(a + 1)x^2 + (a - 1)^2 = 0$

11) $x^3 - (a + 2)x^2 + (2a + 1)x - a = 0$

12) $x^4 - 2ax^3 + (a^2 + 1)x^2 - 2ax + a^2 = 0$

Неполные кубические уравнения

Теория

В этой главе мы рассмотрим частный случай кубических уравнений — так называемые неполные кубические уравнения. Они имеют вид:

$$x^3 + px + q = 0$$

где отсутствует член с x^2.

Откуда берутся такие уравнения: Любое кубическое уравнение $ax^3+bx^2+cx+d = 0$ можно привести к неполному виду с помощью замены $x = y - \frac{b}{3a}$. Эта замена называется "подстановка Тартальи"и позволяет избавиться от квадратного члена. Мы рассмотрим этот приём позже, в главе про формулу Кардано.

Методы решения неполных кубических уравнений:

1. Если есть целый корень — находим его среди делителей q и применяем схему Горнера.
2. Если корень не целый, но уравнение имеет специальный вид (например, $x^3 = a$), решаем извлечением кубического корня.
3. В общем случае для неполных кубических уравнений существует формула Кардано (глава 15).

В этой главе мы сосредоточимся на случаях, когда уравнение решается подбором корня или сведением к уже известным типам.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Уравнение с целым корнем

Решим уравнение:

$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

Здесь $p = -3$, $q = 2$. Ищем целые корни среди делителей 2: $\pm 1, \pm 2$.

Проверяем $x = 1$:

$$1 - 3 + 2 = 0$$

Подходит. Значит, $x = 1$ — корень.

Делим на $(x - 1)$ с помощью схемы Горнера:

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	0

Получили $x^2 + x - 2 = 0$. Решаем:

$$D = 1 + 8 = 9$$
$$x = \frac{-1 \pm 3}{2} = 1 \text{ или } -2$$

Таким образом, корни: $x = -2, 1$ (причём $x = 1$ — кратный? Проверим: при делении мы уже учли один корень $x = 1$, а квадратное уравнение дало ещё один $x = 1$. Значит, $x = 1$ — корень кратности 2).

Ответ: $x = -2, 1$ (кратность 2).

Пример 2

Уравнение вида $x^3 = a$

Решим уравнение:

$$x^3 - 8 = 0$$

Переносим:

$$x^3 = 8$$
$$x = \sqrt[3]{8} = 2$$

Это простейший случай неполного кубического уравнения (здесь $p = 0$).

Пример 3

Уравнение с отрицательным свободным членом

Решим уравнение:

$$x^3 + 2x - 3 = 0$$

Делители -3: $\pm 1, \pm 3$.

Проверяем $x = 1$:

$$1 + 2 - 3 = 0$$

Подходит.

Делим на $(x - 1)$:

	1	0	2	-3
1		1	1	3
	1	1	3	0

Получили $x^2 + x + 3 = 0$. Дискриминант:

$$D = 1 - 12 = -11 < 0$$

Значит, других действительных корней нет.

Ответ: $x = 1$.

Пример 4

Когда целых корней нет

Решим уравнение:

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

Делители 1: ± 1.

Проверяем $x = 1$: $1 - 3 + 1 = -1 \neq 0$. Проверяем $x = -1$: $-1 + 3 + 1 = 3 \neq 0$.

Целых корней нет. Такое уравнение решается либо приближённо, либо по формуле Кардано. Позже мы увидим, что его корни выражаются через кубические радикалы.

Пример 5

Уравнение, сводящееся к квадратному заменой

Иногда неполное кубическое уравнение можно свести к квадратному с помощью замены. Например:

$$x^3 + 2x^2 - 3x = 0$$

Но это уже не неполное (есть член x^2). Для неполных такой фокус не проходит.

Пример 6

Уравнение с дробным корнем

Решим уравнение:

$$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$$

Это не неполное (есть x^2). Но если бы мы сделали замену $x = y + \frac{1}{2}$, то избавились бы от квадрата. Это тема следующей главы.

Пример 7

Приведение к неполному виду

Покажем, как можно избавиться от квадратного члена. Рассмотрим уравнение:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

Делаем замену $x = y + 2$ (здесь $2 = \frac{6}{3}$). Подставляем:

$$(y + 2)^3 - 6(y + 2)^2 + 11(y + 2) - 6 = 0$$

Раскрываем скобки:

$$y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - 6(y^2 + 4y + 4) + 11y + 22 - 6 = 0$$

$$y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - 6y^2 - 24y - 24 + 11y + 22 - 6 = 0$$
$$y^3 + (6y^2 - 6y^2) + (12y - 24y + 11y) + (8 - 24 + 22 - 6) = 0$$
$$y^3 - y = 0$$
$$y(y^2 - 1) = 0$$
$$y = 0, \pm 1$$

Возвращаемся к $x = y + 2$:

$$x = 2, 3, 1$$

Получили те же корни, что и в примере 1 главы 9.

Задачи

1. Решите неполные кубические уравнения подбором целого корня:

1) $x^3 - 3x + 2 = 0$
2) $x^3 - 2x + 1 = 0$
3) $x^3 - 4x + 3 = 0$
4) $x^3 + 2x - 3 = 0$
5) $x^3 + 3x + 4 = 0$
6) $x^3 - 5x + 4 = 0$
7) $x^3 - 6x + 5 = 0$
8) $x^3 + 4x - 5 = 0$
9) $x^3 + 5x + 6 = 0$
10) $x^3 - 7x + 6 = 0$
11) $x^3 + 6x - 7 = 0$
12) $x^3 - 8x + 7 = 0$

2. Решите уравнения вида $x^3 = a$:

1) $x^3 - 1 = 0$
2) $x^3 + 1 = 0$
3) $x^3 - 8 = 0$
4) $x^3 + 8 = 0$
5) $x^3 - 27 = 0$
6) $x^3 + 27 = 0$
7) $x^3 - 64 = 0$
8) $x^3 + 64 = 0$
9) $x^3 - 125 = 0$
10) $x^3 + 125 = 0$
11) $x^3 - 216 = 0$
12) $x^3 + 216 = 0$

3. Найдите целые корни уравнений (если они есть):

1) $x^3 - 3x + 1 = 0$
2) $x^3 - 3x - 2 = 0$
3) $x^3 + 3x - 4 = 0$
4) $x^3 - 4x + 2 = 0$
5) $x^3 + 4x + 1 = 0$
6) $x^3 - 5x + 3 = 0$
7) $x^3 + 5x - 2 = 0$
8) $x^3 - 6x + 4 = 0$
9) $x^3 + 6x - 5 = 0$
10) $x^3 - 7x + 5 = 0$
11) $x^3 + 7x - 6 = 0$
12) $x^3 - 8x + 6 = 0$

4. Приведите кубические уравнения к неполному виду с помощью замены $x = y - \frac{b}{3a}$ и решите их:

1) $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$
2) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$
3) $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$
4) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$
5) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$
6) $x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$
7) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$
8) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$
9) $x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0$
10) $x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = 0$
11) $x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = 0$
12) $x^3 + 5x^2 - 2x - 24 = 0$

5. Решите уравнения, предварительно избавившись от квадратного члена:

1) $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$
2) $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$
3) $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$
4) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$
5) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$
6) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0$
7) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = 0$
8) $x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = 0$
9) $x^3 + 12x^2 + 48x + 64 = 0$
10) $x^3 - 15x^2 + 75x - 125 = 0$
11) $x^3 + 15x^2 + 75x + 125 = 0$
12) $x^3 - 18x^2 + 108x - 216 = 0$

Практика на все приёмы (часть 1)

Теория

Мы изучили много разных методов решения уравнений высших степеней:

- вынесение общего множителя;
- группировка;
- формулы сокращённого умножения;
- биквадратные уравнения;
- трёхчленные уравнения высших степеней;
- возвратные (симметричные) уравнения;
- однородные уравнения;
- схема Горнера;
- комбинированный метод.

В этой главе собраны уравнения третьей и четвёртой степени для самостоятельного решения. Они идут вперемешку, чтобы вы научились определять, какой метод применить в каждом конкретном случае.

Задачи

1. Решите уравнения:

1) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

2) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

3) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

4) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

5) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$

6) $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$

7) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

8) $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$

9) $x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = 0$

10) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

11) $x^3 + 3x^2 - 10x - 24 = 0$

12) $x^4 - 8x^2 + 15 = 0$

2. Решите уравнения, используя группировку:

1) $x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = 0$

2) $x^3 + 3x^2 + 4x + 12 = 0$

3) $x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = 0$

4) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

5) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$

6) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$

7) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

8) $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

9) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$

10) $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = 0$

11) $x^5 - x^4 - x^3 + x^2 = 0$

12) $x^5 + x^4 - x^3 - x^2 = 0$

3. Решите уравнения, используя формулы сокращённого умножения:

1) $x^4 - 16 = 0$

2) $x^4 - 81 = 0$

3) $x^4 - 256 = 0$

4) $x^6 - 1 = 0$

5) $x^6 - 64 = 0$

6) $x^6 - 729 = 0$

7) $x^3 - 27 = 0$

8) $x^3 + 27 = 0$

9) $x^3 - 125 = 0$

10) $x^3 + 125 = 0$

11) $x^5 - 32 = 0$

12) $x^5 + 32 = 0$

4. Решите возвратные уравнения:

1) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$

2) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$

3) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$

4) $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = 0$

5) $2x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0$

6) $3x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 3 = 0$

7) $x^4-4x^3+3x^2-4x+1=0$

8) $x^4-5x^3+4x^2-5x+1=0$

9) $x^4-5x^3+5x^2-5x+1=0$

10) $x^4-6x^3+5x^2-6x+1=0$

11) $x^4-6x^3+6x^2-6x+1=0$

12) $x^4-7x^3+6x^2-7x+1=0$

5. Решите уравнения, используя схему Горнера:

1) $x^3-7x+6=0$

2) $x^3-3x^2-4x+12=0$

3) $x^3+4x^2+x-6=0$

4) $x^3-5x^2-2x+24=0$

5) $2x^3-3x^2-11x+6=0$

6) $3x^3-4x^2-5x+2=0$

7) $x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$

8) $x^4-5x^3+5x^2+5x-6=0$

9) $x^4+2x^3-13x^2-14x+24=0$

10) $2x^4-3x^3-11x^2+3x+9=0$

11) $3x^4-4x^3-12x^2+4x+9=0$

12) $4x^4-5x^3-8x^2+5x+4=0$

6. Решите уравнения, комбинируя различные методы:

1) $x^5-5x^4+4x^3=0$

2) $x^6-7x^3+6=0$

3) $x^4-4x^3+3x^2-4x+1=0$

4) $x^4-2x^3-3x^2+4x+4=0$

5) $(x^2-3x+2)(x^2-5x+6)=0$

6) $(x^2-2x)^2-5(x^2-2x)+6=0$

7) $x^5-x^4-4x^3+4x^2=0$

8) $x^4-5x^2+4=0$

9) $x^4-4x^3+4x^2-4x+4=0$

10) $x^5-3x^4+2x^3=0$

11) $x^6-9x^3+8=0$

12) $x^4+2x^3-3x^2-4x+4=0$

7. Найдите все действительные корни уравнений:

1) $x^3-3x+1=0$ (один корень целый)

2) $x^3-3x^2+4=0$

3) $x^3+3x^2-4=0$

4) $x^3-5x^2+8x-4=0$

5) $x^3-2x^2-4x+8=0$

6) $x^3+4x^2-8x-32=0$

7) $x^4-4x^3+6x^2-4x+1=0$

8) $x^4-8x^3+24x^2-32x+16=0$

9) $x^4+4x^3+6x^2+4x+1=0$

10) $x^4-6x^3+13x^2-12x+4=0$

11) $x^4+6x^3+13x^2+12x+4=0$

12) $x^4-2x^3+2x^2-2x+1=0$

8. Решите уравнения повышенной сложности:

1) $x^7-2x^6-3x^5=0$

2) $x^8-17x^4+16=0$

3) $x^5-2x^4-3x^3+6x^2=0$

4) $x^6-4x^3-5=0$

5) $x^4-6x^3+11x^2-6x=0$

6) $x^5-5x^3+4x=0$

7) $(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12=0$

8) $(x^2-3x)^2-2(x^2-3x)-8=0$

9) $x^4-8x^3+18x^2-8x+1=0$

10) $x^4-6x^3+7x^2+6x-8=0$

11) $x^5-4x^4+4x^3-x^2+4x-4=0$

12) $x^6-3x^4-4x^2=0$

Уравнения вида $ax^{kn} + bx^n + c = 0$

Теория

В этой главе мы рассмотрим ещё более общий вид уравнений, которые сводятся к квадратным с помощью замены. Это уравнения вида:

$$ax^{kn} + bx^n + c = 0$$

где k и n — натуральные числа, причём $k \geq 2$.

Примеры таких уравнений:

- $ax^6 + bx^3 + c = 0$ (здесь $n = 3$, $k = 2$)
- $ax^8 + bx^4 + c = 0$ (здесь $n = 4$, $k = 2$)
- $ax^9 + bx^3 + c = 0$ (здесь $n = 3$, $k = 3$)
- $ax^{12} + bx^6 + c = 0$ (здесь $n = 6$, $k = 2$)
- $ax^{12} + bx^4 + c = 0$ (здесь $n = 4$, $k = 3$)

Метод решения: Такие уравнения решаются с помощью замены:

$$t = x^n$$

Тогда $x^{kn} = (x^n)^k = t^k$, и уравнение превращается в уравнение степени k относительно t:

$$at^k + bt + c = 0$$

Если $k = 2$, получаем квадратное уравнение — это уже знакомые нам трёхчленные уравнения. Если $k = 3$, получаем кубическое уравнение, которое можно решать методами из предыдущих глав. Если $k = 4$, получаем уравнение четвёртой степени, и так далее.

Важное замечание: Не всегда такое уравнение будет иметь простые решения. Если $k > 2$, то после замены мы получаем уравнение степени k, которое само может требовать дополнительных методов.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Случай $k = 2$ (трёхчленное уравнение)

Решим уравнение:

$$x^{10} - 5x^5 + 4 = 0$$

Здесь $n = 5$, $k = 2$. Делаем замену $t = x^5$:

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$t_1 = 1, \quad t_2 = 4$$

Возвращаемся к x:

$$x^5 = 1 \Rightarrow x = \sqrt[5]{1} = 1$$

$$x^5 = 4 \Rightarrow x = \sqrt[5]{4}$$

Ответ: $x = 1, \sqrt[5]{4}$.

Пример 2

Случай $k = 3$ (после замены получаем кубическое уравнение)

Решим уравнение:

$$x^{12} - 7x^4 + 6 = 0$$

Здесь $n = 4$, $k = 3$. Делаем замену $t = x^4$:

$$t^3 - 7t + 6 = 0$$

Получили кубическое уравнение. Проверяем делители 6: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

$t = 1$: $1 - 7 + 6 = 0$ — подходит.

Делим на $(t-1)$ с помощью схемы Горнера:

	1	0	-7	6
1		1	1	-6
	1	1	-6	0

Получили $t^2 + t - 6 = 0$, корни: $t = 2$ и $t = -3$.

Таким образом, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = -3$.

Возвращаемся к x:

$$x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x^4 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{2}$$

$$x^4 = -3 \Rightarrow \text{нет действительных корней}$$

Ответ: $x = \pm 1, \pm\sqrt[4]{2}$.

Пример 3

Случай $k = 4$ (после замены получаем уравнение четвёртой степени)

Решим уравнение:

$$x^{20} - 2x^5 + 1 = 0$$

Здесь $n = 5$, $k = 4$. Делаем замену $t = x^5$:

$$t^4 - 2t + 1 = 0$$

Получили уравнение четвёртой степени. Попробуем найти целые корни среди делителей 1: ± 1.

$t = 1$: $1 - 2 + 1 = 0$ — подходит.

Делим на $(t-1)$ с помощью схемы Горнера:

	1	0	0	-2	1
1		1	1	1	-1
	1	1	1	-1	0

Получили $t^3 + t^2 + t - 1 = 0$. Это кубическое уравнение. Проверим $t = 1$ ещё раз: $1 + 1 + 1 - 1 = 2 \neq 0$. Других целых корней нет. Значит, дальше нужно решать кубическое уравнение другими методами (например, по формуле Кардано).

В рамках этой главы мы ограничимся нахождением очевидных корней.

Пример 4

Когда n и k не взаимно просты

Иногда можно сделать замену более эффективно. Например:

$$x^{12} - 4x^6 + 3 = 0$$

Здесь можно взять $n = 6$, $k = 2$, а можно $n = 3$, $k = 4$. Какой способ удобнее?

Если взять $n = 6$, $t = x^6$, то получим $t^2 - 4t + 3 = 0$, что проще.

Если взять $n = 3$, $t = x^3$, то получим $t^4 - 4t^2 + 3 = 0$, что сложнее.

Выбираем тот способ, который даёт меньшую степень после замены.

Пример 5

Общий алгоритм

Для уравнения $ax^{kn} + bx^n + c = 0$:

1. Делаем замену $t = x^n$.
2. Получаем уравнение $at^k + bt + c = 0$.
3. Решаем это уравнение относительно t.
4. Для каждого найденного t решаем уравнение $x^n = t$.

Задачи

1. Решите уравнения с $k = 2$ (трёхчленные):

1) $x^6 - 7x^3 + 6 = 0$
4) $x^{12} - 13x^6 + 36 = 0$
7) $x^{10} + 3x^5 + 2 = 0$
10) $x^8 - 3x^4 - 4 = 0$
2) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$
5) $x^6 + 5x^3 + 6 = 0$
8) $x^{12} + 5x^6 + 4 = 0$
11) $x^{10} - 4x^5 - 5 = 0$
3) $x^{10} - 5x^5 + 4 = 0$
6) $x^8 + 4x^4 + 3 = 0$
9) $x^6 - 2x^3 - 8 = 0$
12) $x^{12} - 5x^6 - 6 = 0$

2. Решите уравнения с $k = 3$:

1) $x^{12} - 7x^4 + 6 = 0$
2) $x^{15} - 8x^5 + 7 = 0$
3) $x^{18} - 9x^6 + 8 = 0$
4) $x^{12} + 5x^4 + 4 = 0$
5) $x^{15} + 6x^5 + 5 = 0$
6) $x^{18} + 7x^6 + 6 = 0$
7) $x^{12} - 3x^4 - 4 = 0$
8) $x^{15} - 4x^5 - 5 = 0$
9) $x^{18} - 5x^6 - 6 = 0$
10) $x^{12} + 2x^4 - 3 = 0$
11) $x^{15} + 3x^5 - 4 = 0$
12) $x^{18} + 4x^6 - 5 = 0$

3. Решите уравнения с $k = 4$:

1) $x^{20} - 2x^5 + 1 = 0$
2) $x^{24} - 3x^6 + 2 = 0$
3) $x^{28} - 4x^7 + 3 = 0$
4) $x^{20} + x^5 + 1 = 0$
5) $x^{24} + x^6 + 1 = 0$
6) $x^{28} + x^7 + 1 = 0$
7) $x^{20} - x^5 - 2 = 0$
8) $x^{24} - x^6 - 2 = 0$
9) $x^{28} - x^7 - 2 = 0$
10) $x^{20} - 3x^5 + 2 = 0$
11) $x^{24} - 4x^6 + 3 = 0$
12) $x^{28} - 5x^7 + 4 = 0$

4. Выберите удобную замену и решите уравнение:

1) $x^{12} - 4x^6 + 3 = 0$
2) $x^{18} - 7x^9 + 6 = 0$
3) $x^{24} - 5x^{12} + 4 = 0$
4) $x^{30} - 6x^{15} + 5 = 0$
5) $x^{36} - 7x^{18} + 6 = 0$
6) $x^{42} - 8x^{21} + 7 = 0$
7) $x^{16} - 5x^8 + 4 = 0$
8) $x^{27} - 9x^9 + 8 = 0$
9) $x^{32} - 6x^{16} + 5 = 0$
10) $x^{45} - 8x^{15} + 7 = 0$
11) $x^{48} - 7x^{24} + 6 = 0$
12) $x^{54} - 9x^{27} + 8 = 0$

5. Решите уравнения повышенной сложности:

1) $x^{12} - 3x^8 + 2x^4 = 0$ (подсказка: вынесите x^4)
2) $x^{15} - 5x^{10} + 4x^5 = 0$
3) $x^{18} - 7x^{12} + 6x^6 = 0$
4) $x^{20} - x^{15} - 2x^{10} = 0$
5) $x^{24} - 2x^{18} - 3x^{12} = 0$
6) $x^{30} - 3x^{20} - 4x^{10} = 0$
7) $x^{16} - 2x^{12} + x^8 = 0$
8) $x^{25} - 3x^{20} + 2x^{15} = 0$
9) $x^{36} - 4x^{24} + 3x^{12} = 0$
10) $x^{40} - 5x^{30} + 4x^{20} = 0$
11) $x^{48} - 6x^{36} + 5x^{24} = 0$
12) $x^{54} - 7x^{36} + 6x^{18} = 0$

Уравнения, сводящиеся к квадратным заменой $t = x^k$

Теория

В этой главе мы рассмотрим ещё один важный класс уравнений — уравнения, которые сводятся к квадратным с помощью замены $t = x^k$, где k — некоторое число. В отличие от трёхчленных уравнений, здесь в уравнении могут присутствовать разные степени x, но все они кратны некоторому числу k.

Общий вид:

$$ax^{2k} + bx^k + c = 0$$

или более общий случай:

$$ax^{mk} + bx^{nk} + c = 0$$

где m и n — натуральные числа, причём одно из них вдвое больше другого.

Метод решения: Делаем замену $t = x^k$. Тогда:

$$x^{2k} = (x^k)^2 = t^2, \quad x^k = t$$

и уравнение превращается в квадратное:

$$at^2 + bt + c = 0$$

Важное замечание: Не всегда показатели степеней будут именно $2k$ и k. Иногда встречаются уравнения вида:

$$ax^{3k} + bx^k + c = 0$$

Такие уравнения уже не сводятся к квадратным напрямую — после замены получится кубическое уравнение. В этой главе мы рассматриваем только те случаи, когда после замены получается квадратное уравнение.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Простейший случай

Решим уравнение:

$$x^{10} - 5x^5 + 4 = 0$$

Здесь показатели: 10 и 5. Заметим, что $10 = 2 \cdot 5$. Значит, можно сделать замену $t = x^5$:

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$t_1 = 1, \quad t_2 = 4$$

Возвращаемся к x:

$$x^5 = 1 \Rightarrow x = \sqrt[5]{1} = 1$$

$$x^5 = 4 \Rightarrow x = \sqrt[5]{4}$$

Ответ: $x = 1, \sqrt[5]{4}$.

Пример 2

Дробные показатели

Решим уравнение:

$$x^{2/3} - 5x^{1/3} + 4 = 0$$

Здесь показатели: $2/3$ и $1/3$. Заметим, что $2/3 = 2 \cdot (1/3)$. Делаем замену $t = x^{1/3}$:

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$t_1 = 1, \quad t_2 = 4$$

Возвращаемся к x:

$$x^{1/3} = 1 \Rightarrow x = 1^3 = 1$$

$$x^{1/3} = 4 \Rightarrow x = 4^3 = 64$$

Ответ: $x = 1, 64$.

Пример 3

Отрицательные показатели

Решим уравнение:

$$x^{-4} - 5x^{-2} + 4 = 0$$

Здесь показатели: -4 и -2. Заметим, что $-4 = 2 \cdot (-2)$. Делаем замену $t = x^{-2}$:

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$t_1 = 1, \quad t_2 = 4$$

Возвращаемся к x:

$$x^{-2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x^{-2} = 4 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

Ответ: $x = \pm 1, \pm \frac{1}{2}$.

Пример 4

Когда показатели не кратны, но можно сделать замену

Иногда уравнение можно преобразовать. Например:

$$x^8 + 4x^4 + 3 = 0$$

Здесь $8 = 2 \cdot 4$, поэтому замена $t = x^4$ даёт:

$$t^2 + 4t + 3 = 0$$

$$t_1 = -1, \quad t_2 = -3$$

Возвращаемся к x:

$$x^4 = -1 \Rightarrow \text{нет действительных корней}$$

$$x^4 = -3 \Rightarrow \text{нет действительных корней}$$

Ответ: действительных корней нет.

Пример 5

Когда после замены нужно учитывать ОДЗ

Решим уравнение:

$$x^{2/3} + x^{1/3} - 2 = 0$$

Замена $t = x^{1/3}$:

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$t_1 = 1, \quad t_2 = -2$$

Возвращаемся:

$$x^{1/3} = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$x^{1/3} = -2 \Rightarrow x = (-2)^3 = -8$$

Проверка: для $x = -8$: $(-8)^{1/3} = -2$, $(-8)^{2/3} = ((-8)^{1/3})^2 = (-2)^2 = 4$, тогда $4 + (-2) - 2 = 0$ — подходит.
Ответ: $x = 1, -8$.

Пример 6

Когда уравнение содержит разные степени, но не кратные

Рассмотрим уравнение:

$$x^6 - 2x^3 - 3x^2 = 0$$

Здесь нельзя сделать одну замену, потому что степени разные. Но можно вынести x^2:

$$x^2(x^4 - 2x - 3) = 0$$

Дальше решаем отдельно $x = 0$ и $x^4 - 2x - 3 = 0$ (это уже другой тип).

Пример 7

Общий алгоритм

Для уравнения вида $ax^{mk} + bx^{nk} + c = 0$, где $m = 2n$ (или $n = 2m$), делаем замену $t = x^{nk}$ (или $t = x^{mk}$) и получаем квадратное уравнение.

Если показатели не кратны, но имеют общий делитель, можно сделать замену $t = x^d$, где d — наибольший общий делитель показателей.

Задачи

1. Решите уравнения с целыми показателями:

1) $x^6 - 5x^3 + 4 = 0$
2) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$
3) $x^{10} - 7x^5 + 6 = 0$
4) $x^{12} - 13x^6 + 36 = 0$
5) $x^6 + 5x^3 + 6 = 0$
6) $x^8 + 4x^4 + 3 = 0$
7) $x^{10} + 3x^5 + 2 = 0$
8) $x^{12} + 5x^6 + 4 = 0$
9) $x^6 - 2x^3 - 8 = 0$
10) $x^8 - 3x^4 - 4 = 0$
11) $x^{10} - 4x^5 - 5 = 0$
12) $x^{12} - 5x^6 - 6 = 0$

2. Решите уравнения с дробными показателями:

1) $x^{2/3} - 5x^{1/3} + 4 = 0$
2) $x^{2/5} - 4x^{1/5} + 3 = 0$
3) $x^{2/7} - 3x^{1/7} + 2 = 0$
4) $x^{2/3} + 5x^{1/3} + 4 = 0$
5) $x^{2/5} + 4x^{1/5} + 3 = 0$
6) $x^{2/7} + 3x^{1/7} + 2 = 0$
7) $x^{2/3} - 2x^{1/3} - 8 = 0$
8) $x^{2/5} - 3x^{1/5} - 4 = 0$
9) $x^{2/7} - 4x^{1/7} - 5 = 0$
10) $x^{2/3} + 2x^{1/3} - 3 = 0$
11) $x^{2/5} + 3x^{1/5} - 4 = 0$
12) $x^{2/7} + 4x^{1/7} - 5 = 0$

3. Решите уравнения с отрицательными показателями:

1) $x^{-4} - 5x^{-2} + 4 = 0$
2) $x^{-6} - 7x^{-3} + 6 = 0$
3) $x^{-8} - 9x^{-4} + 8 = 0$
4) $x^{-4} + 5x^{-2} + 4 = 0$
5) $x^{-6} + 7x^{-3} + 6 = 0$
6) $x^{-8} + 9x^{-4} + 8 = 0$
7) $x^{-4} - 2x^{-2} - 8 = 0$
8) $x^{-6} - 3x^{-3} - 4 = 0$
9) $x^{-8} - 4x^{-4} - 5 = 0$
10) $x^{-4} + 2x^{-2} - 3 = 0$
11) $x^{-6} + 3x^{-3} - 4 = 0$
12) $x^{-8} + 4x^{-4} - 5 = 0$

4. Решите уравнения, предварительно сделав замену $t = x^k$:

1) $x^{2/3} - 2x^{1/3} - 3 = 0$
2) $x^{3/4} - 5x^{1/2} + 4 = 0$ (подсказка: $3/4 = 2 \cdot (3/8)$? нет, тут нужна другая замена)
3) $x^{4/5} - 3x^{2/5} + 2 = 0$
4) $x^{2/5} + x^{1/5} - 2 = 0$
5) $x^{3/7} - 2x^{1/7} - 3 = 0$
6) $x^{4/9} - 5x^{2/9} + 4 = 0$
7) $x^{-2/3} - 5x^{-1/3} + 4 = 0$
8) $x^{-3/4} - 4x^{-1/2} + 3 = 0$
9) $x^{-4/5} - 3x^{-2/5} + 2 = 0$
10) $x^{-2/5} + x^{-1/5} - 2 = 0$
11) $x^{-3/7} - 2x^{-1/7} - 3 = 0$
12) $x^{-4/9} - 5x^{-2/9} + 4 = 0$

5. Найдите наибольший общий делитель показателей и сделайте замену:

1) $x^{12} - 5x^8 + 4x^4 = 0$
2) $x^{15} - 7x^{10} + 6x^5 = 0$
3) $x^{18} - 9x^{12} + 8x^6 = 0$
4) $x^{20} - x^{15} - 2x^{10} = 0$
5) $x^{24} - 2x^{18} - 3x^{12} = 0$
6) $x^{30} - 3x^{20} - 4x^{10} = 0$
7) $x^{16} - 2x^{12} + x^8 = 0$
8) $x^{25} - 3x^{20} + 2x^{15} = 0$
9) $x^{36} - 4x^{24} + 3x^{12} = 0$

10) $x^{40} - 5x^{30} + 4x^{20} = 0$ **11)** $x^{48} - 6x^{36} + 5x^{24} = 0$ **12)** $x^{54} - 7x^{36} + 6x^{18} = 0$

Разложение на множители: вынесение общего множителя

Теория

В этой главе мы возвращаемся к самому простому методу — вынесению общего множителя за скобки, но теперь применяем его к уравнениям высших степеней.

Основная идея: Если все слагаемые многочлена содержат x в некоторой степени, то эту степень можно вынести за скобки. Например:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_k x^k = x^k(a_n x^{n-k} + a_{n-1}x^{n-k-1} + \cdots + a_k)$$

Важное замечание: Выносить можно не только x^k, но и любое выражение, которое является общим для всех слагаемых. Например, если все коэффициенты делятся на некоторое число, его тоже можно вынести.

Алгоритм:

1. Находим наименьшую степень x, входящую во все слагаемые.
2. Выносим x в этой степени за скобки.
3. Если коэффициенты имеют общий делитель, выносим и его.
4. Приравниваем каждый множитель к нулю.
5. Решаем полученные уравнения.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Простейший случай

Пусть нам нужно решить уравнение:

$$x^5 - 3x^4 + 2x^3 = 0$$

Наименьшая степень x — третья. Выносим x^3:

$$x^3(x^2 - 3x + 2) = 0$$

Произведение равно нулю, значит:

$$x^3 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 - 3x + 2 = 0$$

Из первого: $x = 0$ (кратности 3). Из второго: $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1, 2$.
Ответ: $x = 0, 1, 2$ (с учётом кратности $x = 0$ — трёхкратный корень).

Пример 2

Вынесение с коэффициентом

Решим уравнение:

$$4x^5 - 8x^4 + 4x^3 = 0$$

Здесь можно вынести $4x^3$:

$$4x^3(x^2 - 2x + 1) = 0$$
$$4x^3(x - 1)^2 = 0$$

$$x^3 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (кратности 3)}$$
$$(x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ (кратности 2)}$$

Ответ: $x = 0, 1$.

Пример 3

Когда общий множитель — не только x

Рассмотрим уравнение:

$$6x^4 + 9x^3 - 15x^2 = 0$$

Коэффициенты 6, 9, -15 имеют общий делитель 3. Наименьшая степень x — вторая. Выносим $3x^2$:

$$3x^2(2x^2 + 3x - 5) = 0$$

$$3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (кратности 2)}$$

$$2x^2 + 3x - 5 = 0 \Rightarrow D = 9 + 40 = 49 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm 7}{4} = 1 \text{ или } -\frac{5}{2}$$

Ответ: $x = -\frac{5}{2}, 0, 1$.

Пример 4

Уравнение шестой степени

Решим уравнение:

$$x^6 - 4x^4 = 0$$

Выносим x^4:

$$x^4(x^2 - 4) = 0$$

$$x^4(x - 2)(x + 2) = 0$$

$$x^4 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (кратности 4)}$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

Ответ: $x = -2, 0, 2$.

Пример 5

Когда после вынесения получается биквадратное уравнение

Решим уравнение:

$$x^7 - 5x^5 + 4x^3 = 0$$

Выносим x^3:

$$x^3(x^4 - 5x^2 + 4) = 0$$

$$x^3 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (кратности 3)}$$

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

Это биквадратное уравнение. Делаем замену $t = x^2$:

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$t_1 = 1, \quad t_2 = 4$$

Возвращаемся к x:

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Ответ: $x = -2, -1, 0, 1, 2$ (причём $x = 0$ — трёхкратный).

Пример 6

Вынесение общего множителя из части слагаемых

Иногда общий множитель есть не у всех слагаемых. Например:

$$x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x = 0$$

Здесь можно сгруппировать и вынести из каждой группы, но это уже метод группировки. Чистое вынесение общего множителя здесь не работает, потому что нет общего множителя у всех четырёх слагаемых.

Пример 7

Когда после вынесения получается возвратное уравнение

Решим уравнение:

$$x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x = 0$$

Выносим x:

$$x(x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$x = 0$$
$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3 = 0$$

Это возвратное уравнение? Проверим коэффициенты: 1, -4, 4, -4, 3 — не симметричны. Значит, нужно решать другими методами.

Задачи

1. Решите уравнения вынесением общего множителя:

1) $x^3 - 2x^2 + x = 0$
2) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 = 0$
3) $x^5 - 5x^4 + 4x^3 = 0$
4) $x^6 - 3x^5 + 2x^4 = 0$
5) $2x^3 - 4x^2 + 2x = 0$
6) $3x^4 - 6x^3 + 3x^2 = 0$
7) $4x^5 - 8x^4 + 4x^3 = 0$
8) $5x^6 - 10x^5 + 5x^4 = 0$
9) $x^3 - 9x = 0$
10) $x^4 - 16x^2 = 0$
11) $x^5 - 25x^3 = 0$
12) $x^6 - 36x^4 = 0$

2. Вынесите общий множитель вместе с числовым коэффициентом:

1) $2x^3 + 4x^2 + 2x = 0$
2) $3x^4 - 6x^3 + 3x^2 = 0$
3) $4x^5 + 8x^4 + 4x^3 = 0$
4) $6x^4 - 12x^3 + 6x^2 = 0$
5) $8x^5 + 16x^4 + 8x^3 = 0$
6) $9x^6 - 18x^5 + 9x^4 = 0$
7) $12x^4 + 18x^3 - 6x^2 = 0$
8) $15x^5 - 25x^4 + 10x^3 = 0$
9) $20x^6 - 30x^5 + 10x^4 = 0$
10) $24x^4 + 36x^3 - 12x^2 = 0$
11) $28x^5 - 42x^4 + 14x^3 = 0$
12) $32x^6 - 48x^5 + 16x^4 = 0$

3. Решите уравнения, предварительно вынеся общий множитель, а затем решая полученное уравнение:

1) $x^5 - 5x^3 + 4x = 0$
2) $x^6 - 7x^4 + 6x^2 = 0$
3) $x^7 - 9x^5 + 8x^3 = 0$
4) $x^4 - 5x^2 + 4x = 0$
5) $x^5 - 3x^3 - 4x = 0$
6) $x^6 - 2x^4 - 3x^2 = 0$
7) $x^7 - 4x^5 - 5x^3 = 0$
8) $x^4 + 3x^3 - 4x^2 = 0$
9) $x^5 + 4x^4 - 5x^3 = 0$
10) $x^6 + 5x^5 - 6x^4 = 0$
11) $x^7 + 6x^6 - 7x^5 = 0$
12) $x^8 + 7x^7 - 8x^6 = 0$

4. Определите кратность корня $x = 0$:

1) $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$
2) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 = 0$
3) $x^5 - 5x^4 + 6x^3 = 0$
4) $x^6 - 6x^5 + 9x^4 = 0$
5) $x^7 - 7x^6 + 10x^5 = 0$
6) $x^8 - 8x^7 + 12x^6 = 0$
7) $x^4 - 2x^3 + x^2 = 0$
8) $x^5 - 3x^4 + 2x^3 = 0$
9) $x^6 - 4x^5 + 3x^4 = 0$
10) $x^7 - 5x^6 + 4x^5 = 0$
11) $x^8 - 6x^7 + 5x^6 = 0$
12) $x^9 - 7x^8 + 6x^7 = 0$

5. Решите уравнения повышенной сложности:

1) $x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 = 0$ (после вынесения x^2 решите группировкой)

2) $x^6 - 3x^5 - 4x^4 + 12x^3 = 0$

3) $x^7 - 4x^6 - 5x^5 + 20x^4 = 0$

4) $x^5 - x^4 - 4x^3 + 4x^2 = 0$

5) $x^6 - 2x^5 - 3x^4 + 6x^3 = 0$

6) $x^7 - 3x^6 - 4x^5 + 12x^4 = 0$

7) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 6x = 0$

8) $x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 12x^2 = 0$

9) $x^6 - 4x^5 - 5x^4 + 20x^3 = 0$

10) $x^7 - 5x^6 - 6x^5 + 30x^4 = 0$

11) $x^8 - 6x^7 - 7x^6 + 42x^5 = 0$

12) $x^9 - 7x^8 - 8x^7 + 56x^6 = 0$

Разложение на множители: группировка для высших степеней

Теория

В этой главе мы продолжим изучение метода группировки, но теперь применим его к многочленам более высоких степеней. Группировка позволяет разложить многочлен на множители, объединяя слагаемые в группы так, чтобы в каждой группе можно было вынести общий множитель, после чего появляется общая скобка.

Основная идея: Многочлен $P(x)$ разбивается на группы (обычно по 2, 3 или 4 слагаемых). В каждой группе выносится общий множитель. Если после этого во всех группах появляется одинаковая скобка, её можно вынести за скобки.

Алгоритм:

1. Разбиваем многочлен на группы так, чтобы в каждой группе можно было вынести общий множитель.
2. Выносим общий множитель в каждой группе.
3. Если получилась общая скобка, выносим её.
4. Приравниваем каждый множитель к нулю.
5. Решаем полученные уравнения.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Группировка по два слагаемых (кубическое уравнение)

Решим уравнение:

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = 0$$

Группируем первые два и последние два:

$$(x^3 + 2x^2) + (3x + 6) = 0$$

В первой группе выносим x^2, во второй — 3:

$$x^2(x + 2) + 3(x + 2) = 0$$

Появилась общая скобка $(x + 2)$. Выносим её:

$$(x + 2)(x^2 + 3) = 0$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$x^2 + 3 = 0 \Rightarrow \text{нет действительных корней}$$

Ответ: $x = -2$.

Пример 2

Группировка с минусами

Решим уравнение:

$$x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = 0$$

Группируем:

$$(x^3 - 2x^2) + (-3x + 6) = 0$$

В первой группе выносим x^2, во второй выносим -3:

$$x^2(x - 2) - 3(x - 2) = 0$$

Общая скобка $(x-2)$:
$$(x-2)(x^2-3)=0$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$
$$x^2-3=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$$
Ответ: $x=-\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2$.

Пример 3

Группировка по три слагаемых

Решим уравнение:
$$x^4+2x^3+2x^2+2x+1=0$$
Попробуем сгруппировать первые три и последние два:
$$(x^4+2x^3+x^2)+(x^2+2x+1)=0$$
В первой группе выносим x^2, вторая группа — полный квадрат:
$$x^2(x^2+2x+1)+(x+1)^2=0$$
$$x^2(x+1)^2+(x+1)^2=0$$
Общая скобка $(x+1)^2$:
$$(x+1)^2(x^2+1)=0$$

$$(x+1)^2=0 \Rightarrow x=-1 \text{ (кратности 2)}$$
$$x^2+1=0 \Rightarrow \text{нет действительных корней}$$
Ответ: $x=-1$.

Пример 4

Группировка для уравнения пятой степени

Решим уравнение:
$$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$$
Группируем по три:
$$(x^5+x^4+x^3)+(x^2+x+1)=0$$
В первой группе выносим x^3:
$$x^3(x^2+x+1)+1\cdot(x^2+x+1)=0$$
$$(x^2+x+1)(x^3+1)=0$$
Решаем:
$$x^2+x+1=0 \Rightarrow D=1-4=-3 \Rightarrow \text{нет корней}$$
$$x^3+1=0 \Rightarrow x^3=-1 \Rightarrow x=-1$$
Ответ: $x=-1$.

Пример 5

Группировка по четыре слагаемых

Решим уравнение:
$$x^5-x^4-x^3+x^2=0$$
Сначала вынесем x^2:
$$x^2(x^3-x^2-x+1)=0$$
Теперь группируем в скобке:
$$(x^3-x^2)+(-x+1)=0$$
$$x^2(x-1)-1(x-1)=0$$

$$(x-1)(x^2-1)=0$$
$$(x-1)(x-1)(x+1)=0$$

Таким образом:

$$x^2=0 \Rightarrow x=0 \text{ (кратности 2)}$$
$$(x-1)^2=0 \Rightarrow x=1 \text{ (кратности 2)}$$
$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

Ответ: $x=-1, 0, 1$ (с учётом кратностей).

Пример 6

Группировка с искусственным приёмом

Иногда для группировки нужно добавить и вычесть слагаемое. Например:

$$x^4+4=0$$

Это уравнение не решается группировкой напрямую. Но если добавить и вычесть $4x^2$:

$$x^4+4x^2+4-4x^2=0$$
$$(x^2+2)^2-(2x)^2=0$$
$$(x^2+2-2x)(x^2+2+2x)=0$$

Дальше можно решать квадратные уравнения, но это уже другой метод.

Пример 7

Группировка для уравнения шестой степени

Решим уравнение:

$$x^6-x^5-x^4+x^3=0$$

Выносим x^3:

$$x^3(x^3-x^2-x+1)=0$$

Группируем в скобке:

$$(x^3-x^2)+(-x+1)=0$$
$$x^2(x-1)-1(x-1)=0$$
$$(x-1)(x^2-1)=0$$
$$(x-1)(x-1)(x+1)=0$$

Таким образом:

$$x^3=0 \Rightarrow x=0 \text{ (кратности 3)}$$
$$(x-1)^2=0 \Rightarrow x=1 \text{ (кратности 2)}$$
$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

Ответ: $x=-1, 0, 1$ (с соответствующими кратностями).

Задачи

1. Решите уравнения методом группировки:

1) $x^3+2x^2+3x+6=0$

2) $x^3+3x^2+4x+12=0$

3) $x^3+4x^2+5x+20=0$

4) $x^3-2x^2-3x+6=0$

5) $x^3-3x^2-4x+12=0$

6) $x^3-4x^2-5x+20=0$

7) $2x^3+4x^2+3x+6=0$

8) $3x^3+6x^2+2x+4=0$

9) $4x^3+8x^2+3x+6=0$

10) $2x^3-4x^2-3x+6=0$

11) $3x^3-6x^2-2x+4=0$

12) $4x^3-8x^2-3x+6=0$

2. Решите уравнения, группируя по три слагаемых:

1) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$

2) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$

3) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 3 = 0$

4) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$

5) $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = 0$

6) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3 = 0$

7) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

8) $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

9) $x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x = 0$

10) $x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x = 0$

11) $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

12) $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$

3. Решите уравнения, предварительно вынеся общий множитель, а затем применяя группировку:

1) $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x = 0$

2) $x^5 + 3x^4 - x^3 - 3x^2 = 0$

3) $x^6 + 4x^5 - x^4 - 4x^3 = 0$

4) $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = 0$

5) $x^5 - 3x^4 - x^3 + 3x^2 = 0$

6) $x^6 - 4x^5 - x^4 + 4x^3 = 0$

7) $x^5 - x^4 - 4x^3 + 4x^2 = 0$

8) $x^6 - 2x^5 - 3x^4 + 6x^3 = 0$

9) $x^7 - 3x^6 - 4x^5 + 12x^4 = 0$

10) $x^5 + x^4 - 4x^3 - 4x^2 = 0$

11) $x^6 + 2x^5 - 3x^4 - 6x^3 = 0$

12) $x^7 + 3x^6 - 4x^5 - 12x^4 = 0$

4. Найдите все корни уравнений (укажите кратность):

1) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$

2) $x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0$

3) $x^6 - 4x^5 + 6x^4 - 4x^3 + x^2 = 0$

4) $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4 = 0$

5) $x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 7x^2 + 2x = 0$

6) $x^6 - 6x^5 + 13x^4 - 12x^3 + 4x^2 = 0$

7) $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = 0$

8) $x^5 - 3x^4 - x^3 + 3x^2 = 0$

9) $x^6 - 4x^5 - x^4 + 4x^3 = 0$

10) $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x = 0$

11) $x^5 + 3x^4 - x^3 - 3x^2 = 0$

12) $x^6 + 4x^5 - x^4 - 4x^3 = 0$

5. Решите уравнения повышенной сложности:

1) $x^7 - x^6 - 2x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 = 0$

2) $x^8 - x^7 - 3x^6 + 3x^5 + 2x^4 - 2x^3 = 0$

3) $x^9 - x^8 - 4x^7 + 4x^6 + 3x^5 - 3x^4 = 0$

4) $x^6 - 2x^5 - x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x = 0$

5) $x^7 - 3x^6 - x^5 + 3x^4 + x^3 - 3x^2 = 0$

6) $x^8 - 4x^7 - x^6 + 4x^5 + x^4 - 4x^3 = 0$

7) $x^5 - x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x - 4 = 0$

8) $x^6 - 2x^5 - 5x^4 + 10x^3 + 4x^2 - 8x = 0$

9) $x^7 - 3x^6 - 6x^5 + 18x^4 + 8x^3 - 24x^2 = 0$

10) $x^5 + x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 4x + 4 = 0$

11) $x^6 + 2x^5 - 5x^4 - 10x^3 + 4x^2 + 8x = 0$

12) $x^7 + 3x^6 - 6x^5 - 18x^4 + 8x^3 + 24x^2 = 0$

Разложение на множители: формулы сокращённого умножения

Теория

В этой главе мы применим формулы сокращённого умножения для разложения на множители многочленов высших степеней. Эти формулы позволяют быстро раскладывать выражения, которые имеют вид суммы или разности степеней.

Основные формулы:

- Разность квадратов: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- Сумма кубов: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- Разность кубов: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- Разность четвёртых степеней: $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a-b)(a+b)(a^2 + b^2)$
- Сумма четвёртых степеней: $a^4 + b^4$ не раскладывается на действительные множители (но раскладывается на комплексные или с помощью добавления и вычитания $2a^2b^2$)
- Разность n-х степеней: $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$
- Сумма n-х степеней при нечётном n: $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$

Важное замечание: При решении уравнений мы часто используем эти формулы в обратную сторону: представляем выражение в виде произведения и приравниваем каждый множитель к нулю.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Разность квадратов

Решим уравнение:

$$x^4 - 16 = 0$$

Представляем как разность квадратов:

$$(x^2)^2 - 4^2 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$$

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$x^2 + 4 = 0 \Rightarrow \text{нет действительных корней}$$

Ответ: $x = -2, 2$.

Пример 2

Разность квадратов (более сложный случай)

Решим уравнение:

$$(x^2 + 2x)^2 - 9 = 0$$

Это тоже разность квадратов:

$$(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 2x + 3) = 0$$

Решаем каждое уравнение:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow D = 4 + 12 = 16 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm 4}{2} = 1 \text{ или } -3$$

$$x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow D = 4 - 12 = -8 < 0 \Rightarrow \text{нет корней}$$

Ответ: $x = -3, 1$.

Пример 3

Сумма кубов

Решим уравнение:

$$x^3 + 8 = 0$$

Представляем как сумму кубов:

$$x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4) = 0$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$
$$x^2 - 2x + 4 = 0 \Rightarrow D = 4 - 16 = -12 < 0 \Rightarrow \text{нет корней}$$

Ответ: $x = -2$.

Пример 4

Разность кубов

Решим уравнение:

$$27x^3 - 1 = 0$$

$$(3x)^3 - 1^3 = (3x - 1)(9x^2 + 3x + 1) = 0$$

$$3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$
$$9x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow D = 9 - 36 = -27 < 0 \Rightarrow \text{нет корней}$$

Ответ: $x = \frac{1}{3}$.

Пример 5

Разность четвёртых степеней

Решим уравнение:

$$x^4 - 81 = 0$$

$$(x^2)^2 - 9^2 = (x^2 - 9)(x^2 + 9) = 0$$
$$(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9) = 0$$

$$x = \pm 3, \quad x^2 + 9 = 0 \Rightarrow \text{нет корней}$$

Ответ: $x = -3, 3$.

Пример 6

Сумма четвёртых степеней (искусственный приём)

Уравнение $x^4 + 4 = 0$ не имеет действительных корней, но его можно разложить на множители с помощью добавления и вычитания $4x^2$:

$$x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x) = 0$$

Получаем два квадратных уравнения, но они тоже не имеют действительных корней (дискриминанты отрицательные).

Пример 7

Разность пятых степеней

Решим уравнение:

$$x^5 - 32 = 0$$

$$x^5 - 2^5 = (x - 2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16) = 0$$

Первый множитель даёт $x = 2$. Второй множитель — возвратное уравнение четвёртой степени, которое можно решить делением на x^2 (см. главу 6), но в данном случае оно не имеет действительных корней.

Ответ: $x = 2$.

Пример 8

Сумма пятых степеней

Решим уравнение:

$$x^5 + 32 = 0$$

$$x^5 + 2^5 = (x+2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16) = 0$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

Второй множитель действительных корней не имеет.

Ответ: $x = -2$.

Пример 9

Комбинация с вынесением общего множителя

Решим уравнение:

$$x^7 - 4x^5 = 0$$

Сначала выносим x^5:

$$x^5(x^2 - 4) = 0$$
$$x^5(x-2)(x+2) = 0$$

$$x^5 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (кратности 5)}$$
$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$
$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

Ответ: $x = -2, 0, 2$.

Задачи

1. Решите уравнения, используя разность квадратов:

1) $x^4 - 1 = 0$ **4)** $x^4 - 256 = 0$ **7)** $x^6 - 729 = 0$ **10)** $x^8 - 6561 = 0$

2) $x^4 - 16 = 0$ **5)** $x^6 - 1 = 0$ **8)** $x^8 - 1 = 0$ **11)** $x^{10} - 1 = 0$

3) $x^4 - 81 = 0$ **6)** $x^6 - 64 = 0$ **9)** $x^8 - 256 = 0$ **12)** $x^{10} - 1024 = 0$

2. Решите уравнения, используя сумму и разность кубов:

1) $x^3 - 1 = 0$ **4)** $x^3 + 8 = 0$ **7)** $x^3 - 64 = 0$ **10)** $27x^3 + 1 = 0$

2) $x^3 + 1 = 0$ **5)** $x^3 - 27 = 0$ **8)** $x^3 + 64 = 0$ **11)** $64x^3 - 125 = 0$

3) $x^3 - 8 = 0$ **6)** $x^3 + 27 = 0$ **9)** $8x^3 - 1 = 0$ **12)** $125x^3 + 216 = 0$

3. Решите уравнения, используя формулы для n-х степеней:

1) $x^5 - 1 = 0$ **5)** $x^7 - 1 = 0$ **9)** $x^9 - 1 = 0$

2) $x^5 + 1 = 0$ **6)** $x^7 + 1 = 0$ **10)** $x^9 + 1 = 0$

3) $x^5 - 32 = 0$ **7)** $x^7 - 128 = 0$ **11)** $x^9 - 512 = 0$

4) $x^5 + 32 = 0$ **8)** $x^7 + 128 = 0$ **12)** $x^9 + 512 = 0$

4. Решите уравнения, предварительно сделав замену, чтобы применить формулу:

1) $(x^2+1)^2-4x^2=0$

2) $(x^2+4)^2-16x^2=0$

3) $(x^2+9)^2-36x^2=0$

4) $(x^2-2x)^2-9=0$

5) $(x^2+3x)^2-16=0$

6) $(x^2-4x)^2-25=0$

7) $(x^2+x+1)^2-(x^2-x+1)^2=0$

8) $(x^2+2x+2)^2-(x^2-2x+2)^2=0$

9) $(x^2+3x+3)^2-(x^2-3x+3)^2=0$

10) $x^4+4x^2+4-9x^2=0$

11) $x^4+6x^2+9-16x^2=0$

12) $x^4+8x^2+16-25x^2=0$

5. Решите уравнения, комбинируя вынесение и формулы:

1) $x^5-4x^3=0$

2) $x^7-9x^5=0$

3) $x^9-16x^7=0$

4) $2x^6-2x^4=0$

5) $3x^8-12x^6=0$

6) $4x^{10}-36x^8=0$

7) $x^5+4x^3=0$

8) $x^7+9x^5=0$

9) $x^9+16x^7=0$

10) $2x^4-32=0$

11) $3x^6-243=0$

12) $5x^8-405=0$

6. Найдите все действительные корни уравнений:

1) $x^6-3x^4+3x^2-1=0$ (подсказка: это $(x^2-1)^3$)

2) $x^8-4x^6+6x^4-4x^2+1=0$ (подсказка: это $(x^2-1)^4$)

3) $x^9-3x^6+3x^3-1=0$ (подсказка: это $(x^3-1)^3$)

4) $x^{12}-4x^9+6x^6-4x^3+1=0$

5) $x^4-4x^3+6x^2-4x+1=0$

6) $x^6-6x^5+15x^4-20x^3+15x^2-6x+1=0$

7) $x^4+4x^3+6x^2+4x+1=0$

8) $x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1=0$

9) $x^8+8x^7+28x^6+56x^5+70x^4+56x^3+28x^2+8x+1=0$

10) $x^4-2x^2+1=0$

11) $x^6-3x^4+3x^2-1=0$

12) $x^8-4x^6+6x^4-4x^2+1=0$

Практика для высших степеней

Теория

В этой главе собраны уравнения степени $n > 4$ для самостоятельного решения. Здесь применяются все изученные ранее методы: вынесение общего множителя, группировка, формулы сокращённого умножения, замена переменной, схема Горнера и их комбинации.

Напоминание: При решении уравнений высших степеней полезно придерживаться следующего порядка действий:

1. Проверить, можно ли вынести общий множитель.
2. Проверить, не является ли уравнение трёхчленным (тогда замена $t = x^n$).
3. Проверить, не является ли уравнение возвратным (симметричным).
4. Проверить, не раскладывается ли многочлен по формулам сокращённого умножения.
5. Попробовать сгруппировать слагаемые.
6. Если ничего не помогло, искать рациональные корни среди делителей свободного члена.
7. Использовать схему Горнера для понижения степени.
8. Для полученного уравнения меньшей степени повторять процесс.

Задачи

1. Решите уравнения, используя вынесение общего множителя:

1) $x^7 - 2x^6 + x^5 = 0$

2) $x^8 - 3x^7 + 2x^6 = 0$

3) $x^9 - 4x^8 + 3x^7 = 0$

4) $x^5 - 5x^3 + 4x = 0$

5) $x^6 - 6x^4 + 8x^2 = 0$

6) $x^7 - 7x^5 + 10x^3 = 0$

7) $x^8 - 8x^6 + 12x^4 = 0$

8) $x^9 - 9x^7 + 14x^5 = 0$

9) $x^{10} - 10x^8 + 16x^6 = 0$

10) $x^5 - 4x^4 + 3x^3 = 0$

11) $x^6 - 5x^5 + 4x^4 = 0$

12) $x^7 - 6x^6 + 5x^5 = 0$

2. Решите трёхчленные уравнения высших степеней:

1) $x^6 - 7x^3 + 6 = 0$

2) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$

3) $x^{10} - 5x^5 + 4 = 0$

4) $x^{12} - 13x^6 + 36 = 0$

5) $x^6 - 2x^3 - 8 = 0$

6) $x^8 - 3x^4 - 4 = 0$

7) $x^{10} - 4x^5 - 5 = 0$

8) $x^{12} - 5x^6 - 6 = 0$

9) $x^6 + 5x^3 + 6 = 0$

10) $x^8 + 4x^4 + 3 = 0$

11) $x^{10} + 3x^5 + 2 = 0$

12) $x^{12} + 5x^6 + 4 = 0$

3. Решите возвратные уравнения высших степеней:

1) $x^6+2x^5+2x^4+2x^3+2x^2+2x+1 = 0$

2) $x^6-2x^5+2x^4-2x^3+2x^2-2x+1 = 0$

3) $x^6+3x^5+3x^4+3x^3+3x^2+3x+1 = 0$

4) $x^6-3x^5+3x^4-3x^3+3x^2-3x+1 = 0$

5) $2x^6+3x^5+4x^4+4x^3+4x^2+3x+2 = 0$

6) $3x^6+4x^5+5x^4+5x^3+5x^2+4x+3 = 0$

7) $x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 = 0$

8) $x^8-x^7+x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1 = 0$

9) $x^8 + 2x^7 + 2x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$

10) $x^8 - 2x^7 + 2x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$

11) $x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

12) $x^{10} - x^9 + x^8 - x^7 + x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$

4. Решите уравнения, используя формулы сокращённого умножения:

1) $x^6-1=0$
2) $x^6+1=0$
3) $x^8-1=0$
4) $x^8+1=0$
5) $x^9-1=0$
6) $x^9+1=0$
7) $x^{10}-1=0$
8) $x^{10}+1=0$
9) $x^{12}-1=0$
10) $x^{12}+1=0$
11) $x^{15}-1=0$
12) $x^{15}+1=0$

5. Решите уравнения методом группировки:

1) $x^6+2x^5+x^4+2x^3+x^2+2x=0$
2) $x^7+2x^6+x^5+2x^4+x^3+2x^2+x=0$
3) $x^8+2x^7+x^6+2x^5+x^4+2x^3+x^2+2x=0$
4) $x^6-2x^5+x^4-2x^3+x^2-2x=0$
5) $x^7-2x^6+x^5-2x^4+x^3-2x^2+x=0$
6) $x^8-2x^7+x^6-2x^5+x^4-2x^3+x^2-2x=0$
7) $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$
8) $x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$
9) $x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$
10) $x^5-x^4+x^3-x^2+x-1=0$
11) $x^7-x^6+x^5-x^4+x^3-x^2+x-1=0$
12) $x^9-x^8+x^7-x^6+x^5-x^4+x^3-x^2+x-1=0$

6. Решите уравнения, используя схему Горнера:

1) $x^5-5x^4+5x^3+5x^2-6x=0$
2) $x^6-6x^5+5x^4+20x^3-20x^2-16x+16=0$
3) $x^5-3x^4-5x^3+15x^2+4x-12=0$
4) $x^6-4x^5-5x^4+20x^3+4x^2-16x-4=0$
5) $x^5-2x^4-3x^3+6x^2+2x-4=0$
6) $x^6-3x^5-4x^4+12x^3+4x^2-12x-4=0$
7) $x^5+x^4-4x^3-4x^2+4x+4=0$
8) $x^6+2x^5-5x^4-10x^3+4x^2+8x=0$
9) $x^7+3x^6-6x^5-18x^4+8x^3+24x^2=0$
10) $x^5-x^4-4x^3+4x^2+4x-4=0$
11) $x^6-2x^5-5x^4+10x^3+4x^2-8x=0$
12) $x^7-3x^6-6x^5+18x^4+8x^3-24x^2=0$

7. Решите уравнения повышенной сложности:

1) $x^6-3x^5+2x^4-3x^3+2x^2-3x+2=0$
2) $x^7-2x^6+3x^5-4x^4+3x^3-2x^2+x=0$
3) $x^8-4x^7+6x^6-8x^5+8x^4-6x^3+4x^2-2x=0$
4) $x^9+x^8-2x^7-2x^6+3x^5+3x^4-4x^3-4x^2+4x+4=0$
5) $x^{10}-x^9-3x^8+3x^7+3x^6-3x^5-3x^4+3x^3+x^2-x=0$
6) $x^{12}-2x^{11}-x^{10}+2x^9+x^8-2x^7-x^6+2x^5+x^4-2x^3-x^2+2x=0$
7) $x^5+2x^4-2x^3-4x^2+x+2=0$
8) $x^6+2x^5-3x^4-6x^3+2x^2+4x-1=0$
9) $x^7+2x^6-4x^5-8x^4+4x^3+8x^2-x-2=0$
10) $x^5-2x^4-2x^3+4x^2+x-2=0$
11) $x^6-2x^5-3x^4+6x^3+2x^2-4x-1=0$
12) $x^7-2x^6-4x^5+8x^4+4x^3-8x^2-x+2=0$

Практика на все-все приёмы

Теория

В этой главе собраны уравнения всех типов, изученных в книге. Здесь нет подсказок — нужно самостоятельно определить, какой метод применить в каждом конкретном случае. Задачи расположены в порядке возрастания сложности.

Напоминание основных методов:

- Вынесение общего множителя
- Группировка
- Формулы сокращённого умножения
- Замена переменной (биквадратные, трёхчленные, уравнения вида $ax^{kn} + bx^n + c = 0$)
- Возвратные (симметричные) уравнения
- Однородные уравнения
- Схема Горнера и поиск рациональных корней
- Комбинированные методы

Задачи

1. Решите уравнения (простые):

1) $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

2) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

3) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$

4) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

5) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

6) $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$

7) $x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = 0$

8) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

9) $x^3 + 3x^2 - 10x - 24 = 0$

10) $x^4 - 8x^2 + 15 = 0$

11) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

12) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

2. Решите уравнения (средней сложности):

1) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = 0$

2) $x^5 - 5x^4 + 4x^3 = 0$

3) $x^6 - 7x^3 + 6 = 0$

4) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4 = 0$

5) $x^5 - x^4 - 4x^3 + 4x^2 = 0$

6) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 4 = 0$

7) $x^5 - 3x^4 + 2x^3 = 0$

8) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

9) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0$

10) $x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 = 0$

11) $x^6 - 4x^3 - 5 = 0$

12) $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x = 0$

3. Решите уравнения (с возвратными и однородными):

1) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$

2) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$

3) $2x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0$

4) $x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 1 = 0$

5) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 5x + 1 = 0$

6) $x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 6x + 1 = 0$

7) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

8) $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

9) $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

10) $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$

11) $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = 0$

12) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$

4. Решите уравнения (с использованием схемы Горнера):

1) $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$

2) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$

3) $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0$

4) $2x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 3x + 9 = 0$

5) $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 4x + 9 = 0$

6) $x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 6x^2 = 0$

7) $x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 6x = 0$

8) $x^5 - 4x^4 + 4x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$

9) $x^6 - 7x^5 + 14x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$

10) $x^6 - 6x^5 + 11x^4 - 6x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

11) $x^6 - 5x^5 + 4x^4 + 4x^3 - 5x^2 + x = 0$

12) $x^7 - 7x^6 + 14x^5 - 7x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$

5. Решите уравнения (с дробными и отрицательными показателями):

1) $x^{2/3} - 5x^{1/3} + 4 = 0$

2) $x^{-4} - 5x^{-2} + 4 = 0$

3) $x^{2/5} - 3x^{1/5} - 4 = 0$

4) $x^{-6} - 7x^{-3} + 6 = 0$

5) $x^{3/4} - 2x^{1/2} - 3 = 0$ (подсказка: $3/4 = 2 \cdot (3/8)$? нет, тут лучше замена $t = x^{1/4}$)

6) $x^{-2/3} - 2x^{-1/3} - 3 = 0$

7) $x^{4/5} - 3x^{2/5} + 2 = 0$

8) $x^{-4/5} - 3x^{-2/5} + 2 = 0$

9) $x^{5/6} - 2x^{1/2} - 3 = 0$ (подсказка: $5/6 = 5 \cdot (1/6)$, но $1/2 = 3 \cdot (1/6)$, поэтому замена $t = x^{1/6}$)

10) $x^{-5/6} - 2x^{-1/2} - 3 = 0$

11) $x^{3/7} - 2x^{1/7} - 3 = 0$

12) $x^{-3/7} - 2x^{-1/7} - 3 = 0$

6. Решите уравнения (с параметрами):

1) $x^3 - 3ax^2 + 2a^2x = 0$ (при всех a)

2) $x^4 - 5a^2x^2 + 4a^4 = 0$

3) $x^4 - 2ax^3 + a^2x^2 = 0$

4) $x^3 + ax^2 - 4a^2x - 4a^3 = 0$

5) $x^4 - (a+1)x^2 + a = 0$

6) $x^4 - 2ax^2 + a^2 - 1 = 0$

7) $x^5 - a^3x^2 = 0$

8) $x^6 - a^4x^2 = 0$

9) $x^4 - 4ax^3 + 4a^2x^2 = 0$

10) $x^4 - 2(a+1)x^2 + (a-1)^2 = 0$

11) $x^3 - (a+2)x^2 + (2a+1)x - a = 0$

12) $x^4 - 2ax^3 + (a^2+1)x^2 - 2ax + a^2 = 0$

7. Решите уравнения повышенной сложности:

1) $x^7 - 2x^6 - 3x^5 + 6x^4 + 3x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$

2) $x^8 - 3x^7 - 2x^6 + 8x^5 + x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = 0$

3) $x^9 - 4x^8 + 2x^7 + 8x^6 - 7x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$

4) $x^{10} - 5x^9 + 5x^8 + 10x^7 - 15x^6 - 5x^5 + 15x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 2x - 1 = 0$

5) $x^6 + 2x^5 - 5x^4 - 10x^3 + 4x^2 + 8x - 4 = 0$

6) $x^7 + 3x^6 - 6x^5 - 18x^4 + 8x^3 + 24x^2 - 8 = 0$

7) $x^8 + 4x^7 - 6x^6 - 24x^5 + 8x^4 + 32x^3 - 8x^2 - 16x + 4 = 0$

8) $x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 2x - 4 = 0$

9) $x^6 - 3x^5 - 4x^4 + 12x^3 + 4x^2 - 12x - 4 = 0$

10) $x^7 - 4x^6 - 5x^5 + 20x^4 + 5x^3 - 20x^2 - x + 4 = 0$

11) $x^8 - 5x^7 - 6x^6 + 30x^5 + 6x^4 - 30x^3 - x^2 + 5x + 1 = 0$

12) $x^9 - 6x^8 - 7x^7 + 42x^6 + 7x^5 - 42x^4 - x^3 + 6x^2 + x - 1 = 0$

Формула Кардано для кубических уравнений

Теория

В этой главе мы познакомимся с формулой Кардано — методом решения кубических уравнений в общем виде. Эта формула позволяет находить корни любого кубического уравнения, даже если они не являются рациональными.

Историческая справка: Формула названа в честь итальянского математика Джероламо Кардано, который опубликовал её в 1545 году в книге "Ars Magna". Однако на самом деле формулу открыли другие математики: Сципион дель Ферро и Никколо Тарталья. Кардано получил её от Тартальи под обещание сохранить тайну, но нарушил обещание и опубликовал, правда, с указанием авторства Тартальи.

Приведение к неполному виду: Любое кубическое уравнение $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ можно привести к неполному виду $y^3 + py + q = 0$ с помощью замены:

$$x = y - \frac{b}{3a}$$

После этой замены коэффициент при y^2 становится равным нулю.

Формула Кардано: Для уравнения $y^3 + py + q = 0$ дискриминант вычисляется по формуле:

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

Тогда один корень даётся формулой:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}$$

Анализ дискриминанта:

- Если $\Delta > 0$, то уравнение имеет один действительный корень и два комплексных.
- Если $\Delta = 0$, то все корни действительные, причём два из них совпадают.
- Если $\Delta < 0$, то уравнение имеет три различных действительных корня (этот случай называется "неприводимым и здесь формула Кардано даёт выражение через комплексные числа, хотя корни действительные).

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Уравнение с одним действительным корнем

Решим уравнение:

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

Здесь уже неполный вид: $p = -3$, $q = 1$.

Вычисляем дискриминант:

$$\Delta = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{3}\right)^3 = \frac{1}{4} + (-1)^3 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$$

$\Delta < 0$ — это неприводимый случай. По формуле Кардано:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}}}$$

Корень из отрицательного числа — мнимый. На самом деле выражение можно упростить, но мы оставим в таком виде.

Пример 2

Уравнение с $\Delta > 0$

Решим уравнение:

$$x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$$

Сначала приводим к неполному виду. Здесь $a = 1$, $b = -3$, $c = -3$, $d = -1$.
Замена $x = y + 1$ (так как $-\frac{b}{3a} = 1$):

$$\begin{gathered}(y+1)^3 - 3(y+1)^2 - 3(y+1) - 1 = 0 \\ y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - 3(y^2 + 2y + 1) - 3y - 3 - 1 = 0 \\ y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - 3y^2 - 6y - 3 - 3y - 3 - 1 = 0 \\ y^3 + (3y^2 - 3y^2) + (3y - 6y - 3y) + (1 - 3 - 3 - 1) = 0 \\ y^3 - 6y - 6 = 0\end{gathered}$$

Получили $y^3 - 6y - 6 = 0$, то есть $p = -6$, $q = -6$.
Вычисляем Δ:

$$\Delta = \left(\frac{-6}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{3}\right)^3 = (-3)^2 + (-2)^3 = 9 - 8 = 1$$

$\Delta = 1 > 0$, значит, один действительный корень.
По формуле Кардано:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{-6}{2} + \sqrt{1}} + \sqrt[3]{-\frac{-6}{2} - \sqrt{1}} = \sqrt[3]{3+1} + \sqrt[3]{3-1} = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}$$

Возвращаемся к $x = y + 1$:

$$x = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$$

Пример 3

Уравнение с $\Delta = 0$

Решим уравнение:

$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

Это неполный вид: $p = -3$, $q = 2$.

$$\Delta = \left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{3}\right)^3 = 1^2 + (-1)^3 = 1 - 1 = 0$$

$\Delta = 0$, значит, есть кратные корни. По формуле Кардано:

$$x = \sqrt[3]{-1+0} + \sqrt[3]{-1-0} = \sqrt[3]{-1} + \sqrt[3]{-1} = -1 + (-1) = -2$$

Но мы знаем из предыдущих глав, что это уравнение имеет корни $x = 1$ и $x = -2$ (причём $x = 1$ — двукратный). Формула Кардано дала только один корень. Второй корень можно найти, разделив исходный многочлен на $(x + 2)$.

Пример 4

Общий алгоритм

Для решения кубического уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$:

1. Если $a \neq 1$, делим все уравнение на a.
2. Делаем замену $x = y - \frac{b}{3a}$, чтобы получить уравнение $y^3 + py + q = 0$.
3. Вычисляем дискриминант $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$.
4. Находим один корень по формуле Кардано:

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}$$

5. Делим исходный многочлен на $(y - y_1)$ и решаем полученное квадратное уравнение.
6. Возвращаемся к переменной x.

Задачи

1. Приведите уравнения к неполному виду $y^3 + py + q = 0$:

1) $x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$

2) $x^3 + 3x^2 - 4x + 2 = 0$

3) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

4) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$

5) $2x^3 - 3x^2 + 4x - 5 = 0$

6) $3x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = 0$

7) $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$

8) $x^3 + 9x^2 + 26x + 24 = 0$

9) $x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$

10) $x^3 + 12x^2 + 47x + 60 = 0$

11) $x^3 - 15x^2 + 74x - 120 = 0$

12) $x^3 + 15x^2 + 74x + 120 = 0$

2. Вычислите дискриминант для данных неполных кубических уравнений:

1) $y^3 - 3y + 1 = 0$

2) $y^3 - 3y + 2 = 0$

3) $y^3 - 3y - 2 = 0$

4) $y^3 - 6y + 4 = 0$

5) $y^3 - 6y - 4 = 0$

6) $y^3 - 9y + 6 = 0$

7) $y^3 - 9y - 6 = 0$

8) $y^3 - 12y + 8 = 0$

9) $y^3 - 12y - 8 = 0$

10) $y^3 + 3y + 1 = 0$

11) $y^3 + 6y + 2 = 0$

12) $y^3 + 9y + 3 = 0$

3. Решите уравнения по формуле Кардано (ответ оставьте в виде суммы кубических корней):

1) $x^3 - 3x + 1 = 0$

2) $x^3 - 3x - 1 = 0$

3) $x^3 - 6x + 2 = 0$

4) $x^3 - 6x - 2 = 0$

5) $x^3 - 9x + 3 = 0$

6) $x^3 - 9x - 3 = 0$

7) $x^3 - 12x + 4 = 0$

8) $x^3 - 12x - 4 = 0$

9) $x^3 - 15x + 5 = 0$

10) $x^3 - 15x - 5 = 0$

11) $x^3 - 18x + 6 = 0$

12) $x^3 - 18x - 6 = 0$

4. Приведите к неполному виду и решите по формуле Кардано:

1) $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$

2) $x^3 + 3x^2 - 2 = 0$

3) $x^3 - 6x^2 + 9x - 3 = 0$

4) $x^3 + 6x^2 + 9x + 3 = 0$

5) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0$ (здесь будет кратный корень)

6) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = 0$

7) $x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = 0$

8) $x^3 + 12x^2 + 48x + 64 = 0$

9) $2x^3 - 3x^2 + 4x - 5 = 0$ (сначала разделите на 2)

10) $3x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = 0$

11) $4x^3 - 5x^2 + 6x - 7 = 0$

12) $5x^3 + 6x^2 - 7x + 8 = 0$

5. Исследуйте дискриминант и определите количество действительных корней:

1) $x^3 - 3x + 1 = 0$

2) $x^3 - 3x + 2 = 0$

3) $x^3 - 3x + 3 = 0$

4) $x^3 - 6x + 2 = 0$

5) $x^3 - 6x + 4 = 0$

6) $x^3 - 6x + 6 = 0$

7) $x^3 - 9x + 3 = 0$

8) $x^3 - 9x + 6 = 0$

9) $x^3 - 9x + 9 = 0$

10) $x^3 - 12x + 4 = 0$

11) $x^3 - 12x + 8 = 0$

12) $x^3 - 12x + 12 = 0$

Метод Феррари для уравнений четвёртой степени

Теория

В этой главе мы познакомимся с методом Феррари — способом решения уравнений четвёртой степени в общем виде. Этот метод позволяет находить корни любого уравнения четвёртой степени, сводя его к кубическому уравнению (резольвенте).

Историческая справка: Метод назван в честь итальянского математика Лодовико Феррари, который был учеником Джероламо Кардано. Феррари открыл этот метод в XVI веке, и он был опубликован Кардано в книге "Ars Magna".

Общая идея метода: Уравнение четвёртой степени $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (после деления на старший коэффициент) можно преобразовать, выделив полный квадрат, а затем ввести вспомогательный параметр, чтобы свести задачу к решению кубического уравнения.

Алгоритм метода Феррари:

Рассмотрим уравнение $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

1. Выделяем полный квадрат из первых двух членов:

$$x^4 + ax^3 = (x^2 + \frac{a}{2}x)^2 - \frac{a^2}{4}x^2$$

   Тогда исходное уравнение принимает вид:

$$(x^2 + \frac{a}{2}x)^2 = (\frac{a^2}{4} - b)x^2 - cx - d$$

2. Вводим вспомогательную переменную y и добавляем к обеим частям выражение $2(x^2 + \frac{a}{2}x)y + y^2$:

$$(x^2 + \frac{a}{2}x + y)^2 = (\frac{a^2}{4} - b + 2y)x^2 + (\frac{a}{2} \cdot 2y - c)x + (y^2 - d)$$

3. Выбираем y так, чтобы правая часть стала полным квадратом (т.е. её дискриминант относительно x был равен нулю):

$$D_x = (\frac{a}{2} \cdot 2y - c)^2 - 4(\frac{a^2}{4} - b + 2y)(y^2 - d) = 0$$

   Это даёт кубическое уравнение относительно y (резольвенту).
4. Решаем резольвенту (например, по формуле Кардано) и находим y.
5. При найденном y правая часть становится полным квадратом: $(px + q)^2$. Тогда:

$$(x^2 + \frac{a}{2}x + y)^2 = (px + q)^2$$

6. Решаем два квадратных уравнения:

$$x^2 + \frac{a}{2}x + y = \pm(px + q)$$

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Уравнение с целыми корнями

Решим уравнение:

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$$

Мы уже знаем из главы 10, что корни этого уравнения: $x = 1, 2, 3, 4$. Посмотрим, как метод Феррари приводит к тому же результату.

Здесь $a = -10$, $b = 35$, $c = -50$, $d = 24$.
Выделяем полный квадрат:

$$x^4 - 10x^3 = (x^2 - 5x)^2 - 25x^2$$

Уравнение принимает вид:

$$(x^2 - 5x)^2 = 25x^2 - 35x^2 + 50x - 24 = -10x^2 + 50x - 24$$

Добавляем $2(x^2 - 5x)y + y^2$:

$$(x^2 - 5x + y)^2 = (-10 + 2y)x^2 + (50 - 10y)x + (y^2 - 24)$$

Находим y из условия, что правая часть — полный квадрат. Дискриминант должен быть нулевым:

$$(50 - 10y)^2 - 4(-10 + 2y)(y^2 - 24) = 0$$

Раскрываем скобки:

$$2500 - 1000y + 100y^2 - 4(-10 + 2y)(y^2 - 24) = 0$$
$$2500 - 1000y + 100y^2 - 4(-10y^2 + 240 + 2y^3 - 48y) = 0$$
$$2500 - 1000y + 100y^2 + 40y^2 - 960 - 8y^3 + 192y = 0$$
$$-8y^3 + 140y^2 - 808y + 1540 = 0$$

Делим на -2:

$$4y^3 - 70y^2 + 404y - 770 = 0$$

Подбираем целый корень: $y = 5$?

$$4 \cdot 125 - 70 \cdot 25 + 404 \cdot 5 - 770 = 500 - 1750 + 2020 - 770 = 0$$

Да, $y = 5$ подходит. Делим на $(y - 5)$:

	4	-70	404	-770
5		20	-250	770
	4	-50	154	0

Получили $4y^2 - 50y + 154 = 0$, $D = 2500 - 4 \cdot 4 \cdot 154 = 2500 - 2464 = 36$, $y = \frac{50 \pm 6}{8} = 7$ или $y = 5.5$.
Выбираем любое y, например $y = 5$. Тогда правая часть:

$$(-10 + 2 \cdot 5)x^2 + (50 - 10 \cdot 5)x + (25 - 24) = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 = 1$$

Это не полный квадрат? Что-то пошло не так. Наверное, нужно выбрать другое y. Возьмём $y = 7$:

$$(-10 + 14)x^2 + (50 - 70)x + (49 - 24) = 4x^2 - 20x + 25 = (2x - 5)^2$$

Отлично! Тогда:

$$(x^2 - 5x + 7)^2 = (2x - 5)^2$$

Получаем два уравнения:

$$x^2 - 5x + 7 = 2x - 5 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow x = 3, 4$$

$$x^2 - 5x + 7 = -2x + 5 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1, 2$$

Мы получили все четыре корня!

Пример 2

Биквадратное уравнение

Решим уравнение:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

Здесь $a = 0$, $b = -5$, $c = 0$, $d = 4$.
Выделяем полный квадрат:

$$x^4 = (x^2)^2$$

Уравнение: $(x^2)^2 = 5x^2 - 4$
Добавляем $2x^2y + y^2$:

$$(x^2 + y)^2 = (5 + 2y)x^2 + (y^2 - 4)$$

Условие равенства нулю дискриминанта правой части:

$$0^2 - 4(5 + 2y)(y^2 - 4) = 0$$

$$-4(5+2y)(y^2-4)=0$$
$$(5+2y)(y^2-4)=0$$

Получаем $y=-\frac{5}{2}$ или $y=\pm 2$.
Возьмём $y=2$:

$$(x^2+2)^2=(5+4)x^2+(4-4)=9x^2=(3x)^2$$

Тогда:

$$x^2+2=\pm 3x$$

Первое уравнение: $x^2-3x+2=0 \Rightarrow x=1,2$ Второе: $x^2+3x+2=0 \Rightarrow x=-1,-2$
Получили все четыре корня.

Пример 3

Общий алгоритм

Для уравнения $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$:

1. Выделяем полный квадрат: $(x^2+\frac{a}{2}x)^2=(\frac{a^2}{4}-b)x^2-cx-d$
2. Добавляем $2(x^2+\frac{a}{2}x)y+y^2$:

$$(x^2+\frac{a}{2}x+y)^2=(\frac{a^2}{4}-b+2y)x^2+(\frac{a}{2}\cdot 2y-c)x+(y^2-d)$$

3. Находим y из условия, что правая часть — полный квадрат (дискриминант равен нулю).
4. Решаем полученное кубическое уравнение (резольвенту).
5. Подставляем найденное y и раскладываем правую часть как $(px+q)^2$.
6. Решаем два квадратных уравнения.

Задачи

1. Для данных уравнений запишите резольвенту (кубическое уравнение для y):

1) $x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$
2) $x^4-4x^3+3x^2+2x-1=0$
3) $x^4-2x^3-3x^2+4x+4=0$
4) $x^4+2x^3-3x^2-4x+4=0$
5) $x^4-5x^3+5x^2+5x-6=0$
6) $x^4+5x^3+5x^2-5x-6=0$
7) $x^4-6x^3+11x^2-6x+1=0$
8) $x^4+6x^3+11x^2+6x+1=0$
9) $x^4-8x^3+18x^2-8x+1=0$
10) $x^4+8x^3+18x^2+8x+1=0$
11) $x^4-12x^3+47x^2-60x+24=0$
12) $x^4+12x^3+47x^2+60x+24=0$

2. Решите уравнения методом Феррари (используйте резольвенту из предыдущего задания):

1) $x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$
2) $x^4-4x^3+3x^2+2x-1=0$
3) $x^4-2x^3-3x^2+4x+4=0$
4) $x^4+2x^3-3x^2-4x+4=0$
5) $x^4-5x^3+5x^2+5x-6=0$
6) $x^4+5x^3+5x^2-5x-6=0$
7) $x^4-6x^3+11x^2-6x+1=0$
8) $x^4+6x^3+11x^2+6x+1=0$
9) $x^4-8x^3+18x^2-8x+1=0$
10) $x^4+8x^3+18x^2+8x+1=0$
11) $x^4-12x^3+47x^2-60x+24=0$
12) $x^4+12x^3+47x^2+60x+24=0$

3. Решите биквадратные уравнения методом Феррари:

1) $x^4-5x^2+4=0$
2) $x^4-10x^2+9=0$
3) $x^4-13x^2+36=0$
4) $x^4-4x^2-5=0$
5) $x^4-6x^2-7=0$
6) $x^4-8x^2-9=0$
7) $x^4+5x^2+4=0$
8) $x^4+10x^2+9=0$
9) $x^4+13x^2+36=0$
10) $x^4+4x^2-5=0$
11) $x^4+6x^2-7=0$
12) $x^4+8x^2-9=0$

4. Решите уравнения, предварительно разделив на старший коэффициент:

1) $2x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 3x + 9 = 0$

2) $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 4x + 9 = 0$

3) $4x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 5x + 4 = 0$

4) $2x^4 + 3x^3 - 11x^2 - 3x + 9 = 0$

5) $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 4x + 9 = 0$

6) $4x^4 + 5x^3 - 8x^2 - 5x + 4 = 0$

7) $6x^4 - 5x^3 - 12x^2 + 5x + 6 = 0$

8) $8x^4 - 7x^3 - 14x^2 + 7x + 8 = 0$

9) $9x^4 - 8x^3 - 16x^2 + 8x + 9 = 0$

10) $6x^4 + 5x^3 - 12x^2 - 5x + 6 = 0$

11) $8x^4 + 7x^3 - 14x^2 - 7x + 8 = 0$

12) $9x^4 + 8x^3 - 16x^2 - 8x + 9 = 0$

5. Исследовательские задачи:

1) Покажите, что метод Феррари для биквадратного уравнения $x^4 + bx^2 + c = 0$ даёт те же результаты, что и замена $t = x^2$.

2) Для уравнения $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ (возвратного) покажите, что резольвента всегда имеет корень $y = 1$.

3) Для уравнения $x^4 + ax^3 + bx^2 - ax + 1 = 0$ покажите, что резольвента всегда имеет корень $y = -1$.

4) Решите уравнение $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 1 = 0$ методом Феррари.

5) Решите уравнение $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 1 = 0$ методом Феррари.

6) Решите уравнение $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1 = 0$ методом Феррари.

7) Решите уравнение $x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 8x + 1 = 0$ методом Феррари.

8) Решите уравнение $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$ методом Феррари (мы это уже сделали, но попробуйте другой выбор y).

9) Попробуйте вывести общую формулу для резольвенты в зависимости от коэффициентов.

10) Исследуйте связь метода Феррари с методом Декарта — Эйлера решения уравнений четвёртой степени.

11) Почему метод Феррари не используется в школьном курсе, а только упоминается?

12) Какие уравнения четвёртой степени можно решить проще, не прибегая к методу Феррари?

Заключение

Вот мы и добрались до конца книги. Если вы дошли до этих строк и прорешали хотя бы часть задач — значит, вы проделали огромную работу. Поздравляю!

Уравнения высших степеней — это та тема, где многие школьники и даже студенты начинают паниковать. Слишком много разных методов, слишком громоздкие вычисления, слишком страшные формулы вроде Кардано и Феррари. Но теперь вы знаете, что за всей этой сложностью скрывается стройная система.

В этой книге мы разобрали все основные подходы к решению уравнений третьей, четвёртой и более высоких степеней:

- начали с самого простого — вынесения общего множителя, группировки и формул сокращённого умножения;
- научились сводить уравнения к квадратным с помощью замен (биквадратные, трёхчленные, возвратные);
- познакомились с однородными уравнениями;
- освоили схему Горнера — мощный инструмент для поиска корней и понижения степени;
- разобрались с неполными кубическими уравнениями;
- научились комбинировать разные методы;
- и наконец, заглянули в «высший пилотаж» — формулы Кардано и Феррари, которые позволяют решить любое кубическое и уравнение четвёртой степени.

Но главное — мы научились главному: видеть, какой метод применить в каждом конкретном случае. Потому что в реальных примерах никто не пишет «решите уравнение методом группировки» или «здесь нужна схема Горнера». Вы просто видите уравнение и должны сами понять, что с ним делать. И чем больше у вас опыта, тем быстрее приходит это понимание.

Если какие-то темы остались непонятыми — не расстраивайтесь. Вернитесь к ним ещё раз, порешайте дополнительные задачи. Математика не терпит суеты, но она очень благодарна тем, кто проявляет терпение и настойчивость. И помните: даже великие математики не сразу находили решения — Кардано и Феррари потратили годы на вывод своих формул.

А если вам понравился такой формат — теория, примеры, много задач — у меня есть и другие книги. На сайте books.mrepetitor.com вы найдёте пособия по разным темам школьной математики и физики. Там же есть научно-популярные книги, которые я писал для тех учеников, кому интересно не только решать задачи, но и понимать, как устроен окружающий мир, как развивалась наука и какие люди стояли за великими открытиями.

Записаться на мои занятия можно на сайте study.mrepetitor.com. Я продолжаю преподавать математику и физику для школьников с 5 по 11 классы, готовлю к ЕГЭ, ОГЭ и ЦТ. Если чувствуете, что нужна помощь, или хотите подготовиться к экзаменам — обращайтесь!

Желаю вам успехов в учёбе, побольше интересных задач и удовольствия от их решения!

Дмитрий Трепачёв